ワインバーグ

場の量子論

6巻　超対称性：非摂動論的効果と拡張

S. Weinberg　著

青山秀明
有末宏明　共訳
杉山勝之

物理学叢書
94

吉岡書店

The Quantum Theory of Fields

Volume III
Modern Applications

Steven Weinberg
University of Texas at Austin

Japanese translation right arranged
with Cambridge University Press, Cambridge
through Tuttle-Mori Agency, Inc., Tokyo

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

目 次

アステリスク (*) を付けた節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

1 巻 粒子と量子場

2 巻 量子場の理論形式

---

3 巻 非可換ゲージ理論

---

4 巻 場の量子論の現代的諸相

5 巻 超対称性：構成と超対称標準模型

III 巻の序文

この巻では超対称性を持つ場の量子論を扱う．この超対称性は通常の対称性多重項に属する整数スピンの粒子と, 同様な半整数スピンの粒子を統合する．これらの理論では「階層性問題」, つまり電弱対称性が破れるエネルギーの大きさ 300 GeV とプランク質量の莫大な比率のミステリー, を解決する可能性がある．また, 超対称性は基本的物理理論に求められる唯一性につながる．同じスピンの粒子を通常の対称性の多重項に組むリー群は無限個あるが, 4 次元時空では超対称性は 8 種類しかなく, しかもその内ただ一つ, もっとも単純なものだけが観測される粒子に直接に関わっている．

これらの理由により, この「**場の量子論**」の第 3 番目の巻を超対称性に当てる．さらには, 超対称性に基づく場の量子論は, 他の場の理論に見られない顕著な性質がある．ある超対称性理論では結合定数が摂動論のどんな次数でもくりこみを受けない．また, ある理論は有限であり, さらに, そのうちのいくつかは完全に解けさえする．実際, 過去 10 年間になされた場の量子論における意義ある仕事の多くは超対称性に基づくものであった．

不幸なことに, 四半世紀経っても超対称性で関係する粒子の対は見つかっておらず, 超対称性には直接の証拠があるとは言えない．ただ, 間接的証拠としては一つだけ重要なものがある．つまり, $SU(3)$, $SU(2)$, $U(1)$ のゲージ群の結合定数の高エネルギーでの統合は, 超対称性か

ら要請される新しい粒子のおかげで, それが無いときに比べてうまくいくということだ.

しかしながら, 超対称性がそれ自身魅力的なものであるということと, 超対称性が階層性問題を解決する可能性を持っていることから, 私と, 他の多くの物理学者は超対称性は現実の世界で発見されると確信している. それも近い将来のことだろう. 超対称性は現存する加速器や, 現在 CERN で建設中の大ハドロン衝突器 (Large Hadron Collider) で計画されている高エネルギー実験の主な目的である.

24 章で歴史的な話をしたのち, 25–27 節で超対称性を持つ場の理論の中心的な機構, つまり超対称性代数と超対称性多重項の構造, 一般的な超対称ラグランジアンの構成, 特にカイラルおよびゲージ超場の理論での構成について説明する. 28 章ではこれらの機構を使って, 電弱相互作用と強い相互作用の標準理論に超対称性をもりこむ. また, 実験的な困難と展望についても述べる. 29 章から 32 章では数学的により進んだトピックを扱う. それらは, 非摂動論的な結果, 超ダイアグラム, 超重力, 高次元時空での超対称性などだ.

ここでの超対称性の扱いについては, 最大限, 明確で完備したものとなるように努めた. 計算については, 文献にある結果を引用するよりも可能な限り読者にその過程を示すようにした. 特に 28 章などで, この種の本に含むことができないほど計算が長く複雑すぎる場合には, その簡易版を与えて, どのような物理的問題が関係しているのかが読者に分かるようにしたつもりだ.

この本では新しすぎるために他の既刊の本には一般的に含まれていないトピックも含むように努めた. それらは, 摂動論的および非摂動論的な輻射補正を正則性を使って調べること, 中心荷電の計算, 超対称性のゲージによる破れと量子アノマリーによる破れ, ウィッテン指標, 双対性, $N = 2$ 超対称ゲージ理論の有効ラグランジアンのサイバーグ・ウィッテンによる計算, モジュラー場による超対称性の破れな

どがある. また, 高次元時空における超対称性について, とくに p ブレーンの理論などの最近の急速な発展についても簡単に見ておく.

一方で, 既刊の本によく説明されている2つのトピックについては通常の扱いを簡素化した. それらの一つは超ダイアグラムの使用だ. 輻射補正の一般的構造を調べるには従来超ダイアグラムが用いられてきたが, その多くは現在では 27.6 節と 29.3 節で述べるように正則性を使ってより簡単にできる. もう一つは超重力だ. 31.1節から31.5節にかけて, 超重力についてその場が弱い極限での詳細で完備した扱いを与える. これにより, 超重力理論がなぜグラビトン (重力子) , グラビティーノ, そして補助場などを含んでいるのか, そして, 量子アノマリーによる超対称性の破れにより生成されるグラビティーノの質量とゲージーノの質量の表式を含む超重力理論におけるもっとも重要な結果を導く. 31.6 節では超重力理論を任意の強さの重力場へと一般化する計算の概略を述べる. しかし, これらの計算は非常に長く, 美しくもないので結果は他の文献のものを引用することにした. しかし, 31.7 節では重力による超対称性の破れについて通常よりも充実した扱いをした. 弦理論に関係した超対称性について, 過去10年間の素晴らしい研究成果を含めることができなかったのは残念だ. しかし, 弦理論はこの本で扱う範囲を越えていて, 私は説明の基礎になる事柄を与えずに結果を述べることはしたくなかった.

引用については超対称性について古典的な論文と, この本で述べはしたが詳細に説明できなかったトピックについての有用な参考文献を与えた. ここで述べた事柄で誰に帰依するものかが必ずしも分からない場合もあり, 引用が欠けているからといって, 必ずしもここに述べた事柄がオリジナルなものだと言うわけではない. しかし, オリジナルな事柄もある. いくつかの個所では原論文や標準的な教科書での扱いを改善したものになっていると信じている. たとえば, コールマン・マンデューラ定理の証明, 拡張された超対称理論のパリティ行列の扱

い, 最小超対称標準模型での超対称性をソフトに破る新しい項の導入, 超カレントの和則の導出, サイバーグ・ウィッテン解の唯一性の証明などがそうだ.

各章には問題をつけた. これらの問題の幾つかはその章で述べたテクニックを使うことを目的とし, また他はその章の結果をより広い範囲の理論に適用することを示唆するよう企てた.

超対称性のコースを教える際に, 私の経験ではこの本は大学院の一年間のコースに相応しい材料を提供する. この本は, このシリーズの前の2巻* に述べられているレベルの場の量子論になじんでいる学生に適切なものとなるように作られている. 読者が第I巻と第II巻を読んでいるとは仮定しないが, 幸いにもそれらを読んだ読者には便利なように, 同じ記法をこの本でも使い, 適切なところでは第I巻と第II巻の内容への注釈をつけた.

* * *

この本を作る際にはテキサス大学の同僚達に世話になった. ここに感謝をしておきたい. なかでも, Luis Boya, Phil Candelas, Bryce と Cecile De Witt, Willy Fischler, Daniel Freed, Joaquim Gomis, Vadim Kaplunovsky, また特に Jacques Distler に感謝する. また, Sally Dawson, Michael Dine, Michael Duff, Lawrence Hall, 村山斉, Joe Polchinski, Edward Witten, Bruno Zumino の各氏には各種のトピックについて貴重な助言をいただいた. Jonathan Evans はこの巻の原稿を通読し多くの貴重な示唆をしてくれた. また, 図を作成した Alyce Wilson, 無数の本や文献を見つけた Terry Riley, 多くの補助をした Jan Duffy の各氏に感謝する. ケンブリッジ大学出版会の Maureen Storey 氏に

*訳者注：原書第I巻は日本語訳1,2巻に分冊され、原書第II巻は日本語訳3,4巻に分冊されて発行されている.

はこの本の出版に際して世話になった. また, 編集者 Rufus Neal 氏にはずっと暖かいアドバイスをいただいた.

スティーブン ワインバーグ

テキサス州オースティン市
1999年5月

記法

超対称性の本を書くにあたって大きな問題となるのはスピノルに2成分表示を用いるか, 4成分表示を用いるかということだ. 超対称性についての標準的な教科書は2成分ワイル表示をとることが多い. ここではその代りに, 超対称性代数と多重項を構成する最初の段階を除いて4成分ディラック表示を採ることにした. これは, こうすることにより, この本が素粒子の現象論や模型の構成の研究をする物理学者に, より取りつき易くなると思われるからだ. 実際, 超対称性の専門家たちが, 彼らの記法の特殊性のために, お互い同士の意思疎通は良くなるかもしれないが, 素粒子理論家の大半から別の領土を作ってしまうとしたら, それは残念なことだ.

4成分から2成分の形式に表式を書き換えるのはそれほど難しいことでもない. この本で一貫して使うディラック行列表示は, γ_5 が対角行列で, その主対角成分が $+1, +1, -1, -1$ となるものだ. この表示では, 任意の (たとえば超対称性生成子 Q_α, 超空間座標 θ_α, 超微分 $\mathcal{D}_\alpha$ などの) 4成分マヨラナ・スピノル ψ_α は2成分スピノル χ_a を使って,

$$\psi = \begin{pmatrix} e\chi^* \\ \chi \end{pmatrix}$$

と書くことができる. ここで e は 2×2 反対称行列で $e_{12} = +1$ となる. 2成分スピノル χ_a は他の本でしばしば $\psi_a^* = \bar{\psi}_{\dot{a}}$ と書かれ, $(e\chi^*)_a$

は ψ^a となる. 4成分マヨラナ・スピノルについての有用な性質は26章の補遺にまとめておく.

この本で使われる記法の他の性質を挙げておく.

i, j, k などのラテン文字の添字は, 通常三つの空間座標に相当する 1,2,3 の値をとる. 特に記したところでは, $x_4 = it$ として, それらは 1,2,3,4 の値をとる.

μ, ν などのギリシャ文字のアルファベットの中間部にあるものを使った添字は, x^0 を時間座標として, 通常四つの時空座標に相当する 1,2,3,0 の値をとる. 一般座標系の時空座標と局所慣性系の時空座標を区別する必要があるところでは, μ, ν 等を前者, a, b 等を後者に使う.

α, β などのギリシャ文字のアルファベットの最初の方を使った添字は, 通常 (24章を除いて), 4成分スピノルの4つの成分に使う. 混乱を避けるために述べておくと, これはII巻[†] の記法と異なる. この本では対称性代数の生成子の添字には A, B 等を使い, 2成分スピノルの成分には a, b などの添字を使う. 特に, 4成分超対称性生成子は Q_α と記し, 2成分生成子 (Q_α の下の2成分) は Q_a と書く.

繰り返されている添字については, 特に断らない限り, 和を取る.

時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ は対角であり, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{00} = -1$ ととる.

ダランベルシャンは $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$ と定義する. ここで ∇^2 はラプラシアン $\partial^2/\partial x^i \partial x^i$.

「レビ・チビタ・テンソル」$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\epsilon^{0123} = +1$ を満たす完全反対称テンソル.

[†]日本語訳では3巻, 4巻.

ディラック行列 γ_μ は, $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$ を満たすように定義されている. また, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, および $\beta = i\gamma^0$ としている. 行列を明らかに書く必要があるときにはブロック行列を使って表す.

$$\gamma^0 = -i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = -i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

ここで $\mathbf{1}$ は単位 2×2 行列, $\mathbf{0}$ は全ての要素がゼロの 2×2 行列, また, $\boldsymbol{\sigma}$ は通常のパウリ行列,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

だ. また, しばしば 4×4 のブロック行列,

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{bmatrix}, \qquad \epsilon = \begin{bmatrix} e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e \end{bmatrix}$$

を使う. ここで, e は反対称 2×2 行列 $i\sigma_2$ だ. たとえば, この本での4成分マヨラナ・スピノル s の位相の定義は $s^* = -\beta\gamma_5\,\epsilon\, s$ と表すことができる.

階段関数 $\theta(s)$ は, $s>0$ で $+1$, $s<0$ で 0 となる関数.

行列またはベクトル A の複素共役, 転置, エルミート共役はそれぞれ, A^*, A^{T}, $A^\dagger = A^{*\mathrm{T}}$ と記す. 演算子 O のエルミート共役は $O^\dagger$ と記す. ただし, 演算子のベクトルや行列が転置されないことを強調するところではアステリスク (*) を使う. 式の終りの +H.c. または +c.c. は, それぞれ前の項のエルミート共役か複素共役の項を加えることを意味する. 4成分スピノル u の上の棒線は, $\bar{u} = u^\dagger\beta$ を意味する.

$\hbar$ と光速を 1 にとる単位系を用いる. この本を通して, $-e$ は有理系での電子の電荷であり, 微細構造定数は $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ となっている. 温度はボルツマン定数を1とするエネルギー単位で表す.

引用した数値データの終りの括弧内の数字は, そのデータの末尾の数字の不確定性を意味する. 特に述べない限り, 実験データは'Review of Particle Properties,' The Particle Data Group, *European Physics Journal C* **3**, 1 (1998) より引用している.

第29章

摂動論を越えて

いままでに議論した超対称性から得られる結果の大部分は，摂動論を使って推測されている．この章では,非摂動論的効果を考慮した場合でさえ成り立ついくつかの結果を考えることにしよう．

29.1 超対称性の破れの一般的側面

既知の粒子のスペクトルには超対称性は観測されていないので，超対称性は破れているに違いない．標準模型における樹木近似での超対称性の破れは経験的に考えにくく,電弱対称性の破れのスケールとプランク・スケールあるいは大統一のスケールの間が大きく隔たっていることから，あるゲージ結合定数が強くなったときに超対称性が破れると考えられることを前章で見た．したがって，摂動論を使わずに自発的な超対称性の破れを調べることが必須だ．26.7節で見たように,作用に超対称性があることは超対称カレント $S^\mu(x)$ が存在することを意味している．このカレントは (26.A.1) の意味でマヨナラ・スピノルだ．つまり,

$$S^\mu(x)^* = -\beta\gamma_5\epsilon S^\mu(x) \tag{29.1.1}$$

となる．このカレントは保存され,

$$\partial_\mu S^\mu_\beta(x) = 0 \tag{29.1.2}$$

その時間成分の積分は超対称生成子

$$\int d^3x\, S^0_\beta(x) = Q_\beta \tag{29.1.3}$$

となっている．これに対して，$-i(\bar{\alpha}Q)$ と任意の演算子の交換子は，微小マヨラナ・スピノル・パラメーター α を持つ超対称変換のもとでのその演算子の変化を与える．

これらの結果は作用の超対称性を使って導かれた．おそらく，積分 (29.1.3) が存在するという仮定を除いては，なにごとも超対称性が自発的に破れるかどうかには依存していなかった．実際，この仮定は質量ゼロのフェルミオンを含む理論では破れているかもしれない．その理論では，この積分が収束しないような長距離効果 (あるいは同じことだが, 4 元運動量がゼロの時の極) を持つことができる．超対称性が破れると, 質量がゼロのそのようなフェルミオンが必然的に現れることをここでは見るだろう．質量がゼロのフェルミオンを含む理論で，この積分の収束の問題を避けるために，有限体積 V の空間で考えるのが非常に便利だ．周期的境界条件を課すことにより，並進対称性を保ちながらこの積分の収束の問題を避けることができる．つまり，任意の空間座標 x^i を $V^{1/3}$ だけ並進させても，全ての場は影響を受けない．

3 元運動量がゼロの超対称性真空状態 $|\mathrm{VAC}\rangle$ が存在する場合，量子場の超対称性変換を引き起こす演算子 Q_α が存在すると，超対称性の全ての結果を導くことができる．また，多粒子状態は場の演算子を作用させることによって，この超対称性真空状態から構成できる．しかし，状態 $|\mathrm{VAC}\rangle$ が $Q_\alpha|\mathrm{VAC}\rangle = 0$ の意味で超対称のとき，反交換関係 (25.2.36) から，この状態は運動量がゼロであるばかりでなくエネルギーもゼロであることが分かる．逆に真空のエネルギーがゼロな

らば，真空はQ_aとQ_a^*で消えなければならず，したがって超対称的でなければならないことが正の演算子$\{Q_a, Q_a^*\}$（しばらくの間，2成分表示に戻る）の真空期待値をとることにより分かる．一方，真空が超対称的でない場合は真空のエネルギーは正定値でなければならない．そこで，超対称性が自発的に破れるかどうかという問題は真空のエネルギーが正定値かゼロかという問題と完全に同じになる．

同じ理由から，$N(>1)$個の2成分スピノル生成子Q_{ar}とその共役を持つ拡張超対称性は，より少ない生成子を持つ超対称性や単純超対称性には自発的に破れないことをウィッテンは結論付けた．なぜなら生成子の内のどの一つも真空を消さないとき，真空のエネルギーはゼロになることができず，生成子のどれも真空を消すことができないことが分かるからだ.[1] 通常，真空状態のエネルギーは全ての状態のエネルギーにおけるはっきりとは定義されない加法的定数として現れるが，この定数は超対称性の反交換関係における4元エネルギー運動量ベクトルによって意味付けが与えられる．有限体積で考える利点の一つは，真空の全エネルギーについて論じることを意味のあるものとしていることだ．

ヒュージュ，リュー，ポルチンスキーは部分的に破れたある種の超対称性を持つ理論が存在することを指摘した.[1a] これらの理論は25章で説明したような超対称性代数を持っていない．そのかわり，(26.7.45)のような反交換関係に基づいたカレントの代数を持つ．

$$\int d^3x \left\{ S^0_{r\alpha}(x)\,,\, \bar{S}^\mu_{s\beta}(y) \right\} = -2i\,\delta_{rs}\gamma_\nu \Theta^{\mu\nu}(y) + 2i\gamma^\mu C_{rs}\,.$$

ここで$\Theta^{\mu\nu}$は保存則$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$を満たすエネルギー・運動量テンソルであり，$C_{rs}$は新たに導入したある定数だ．$N=1$の場合，この定数は$\Theta^{\mu\nu}$における項$-\eta^{\mu\nu}C$と見なすことができるが，これは$C_{rs} \propto \delta_{rs}$でなければ拡張超対称性の場合には可能ではない．しかし，この条件はこの場合に必要とされるものではない．この代数はS行列の対称性

ではないので25.2節のハーグ・ロプザンスキー・ゾウニアスの定理によって排除されない．自発的に破れた対称性はS行列の対称性とは成り得ないというのは真実であるが，それらの破れた対称性は通常，代数や超代数に基づいており，その代数は理論のある相においてS行列の対称性であり得ると仮定されている．C_{rs}がδ_{rs}に比例しないので，カレントの超代数はどの理論のどの相にあるS行列の対称性も生成できない．ここでは25章で取り上げたような超代数のみを考えることにする．その代数に対してはウィッテンの議論が適応できる．

有限体積で考えるもう一つの利点は全ての状態が離散的で規格化可能となるからだ．Q_αとP_μが交換するということの直接的な結果として，エネルギーがゼロでない任意の状態は,同じエネルギーと運動量を持ち反対の統計性をもつ別の状態と対をなすことが分かる．これを見るために3元運動量$\mathbf{p}$に注目すると，2成分スピノルu_aが$\sum_{ab} u_a^* \boldsymbol{\sigma}_{ab} \cdot \mathbf{p} u_b = 0$と$\sum_a |u_a|^2 = 1$を満たすことが分かる．("3"方向にある$\mathbf{p}$に対して$u = (1,1)/\sqrt{2}$ととる．任意の他の方向にある$\mathbf{p}$については，"3"方向を$\mathbf{p}$の方向に向ける回転のスピン1/2表現をこの$u$に作用させればよい.) このとき4元運動量$p^\mu$を持つ空間内で反交換関係(25.2.31)と(25.2.32)により，

$$\mathrm{Q}^2(p) = p^0 \tag{29.1.4}$$

となる．ここで$\mathrm{Q}(p)$は超対称性生成子のエルミートな線形結合

$$\mathrm{Q}(p) = \sum_a u_a \mathrm{Q}_a + \sum_a u_a^* \mathrm{Q}_a^* \tag{29.1.5}$$

となっている．4元運動量p^μを持ち$p^0 > 0$である規格化された状態$|X\rangle$に$\mathrm{Q}(p)$を作用させることにより，同じ4元運動量を持ち反対の統計性を持つ規格化された別の状態$|Y\rangle = \mathrm{Q}(p)|X\rangle/\sqrt{p^0}$が得られる．更に$|X\rangle$はこのようにして$|Y\rangle$と関係付けられる唯一つの状態だ．なぜなら，もし$|Y\rangle = \mathrm{Q}(p)|X\rangle/\sqrt{p^0}$とすると(29.1.4)により$|X\rangle = \mathrm{Q}(p)|Y\rangle/\sqrt{p^0}$

となるからだ．超対称性生成子やスピン状態は複数個あるので，これらのフェルミオン的状態とボゾン的状態の対には通常，同一の4元運動量を持つ他の対が伴う．しかし当面はエネルギーがゼロでない全ての状態は少なくともこれらの対にグループ分けされるということを知っていれば十分だ．

超対称性が破れると，決まった数の粒子を持つ状態が，その状態とは反対の統計性を持ち同じ4元運動量と同じ数の粒子数を持つ別の状態と超対称多重項を形成するとは期待できない．このとき，状態が対をなすと，質量を持たないフェルミオンが存在しなければならなくなる．これは，任意のn粒子状態は同じエネルギーと運動量を持つが反対の統計性をもつある状態と対をなさなければならず，その状態をエネルギーと運動量がゼロの質量の無いフェルミオン1個と，元のと同じn個の粒子とから作れるからだ．この質量を持たないフェルミオンは**ゴールドスティーノ** (Goldstino)として知られている．より正確には任意のn粒子状態は三つの状態を伴っている．そのうちの二つは同じエネルギーと運動量を持つが反対の統計性を持ち，スピンがアップまたはダウンで運動量ゼロのゴールドスティーノを一つ余分に含んでいる状態だ．もう一つの状態は同じエネルギーと運動量を持ち，元と同じ統計性を持つものであり，反対のスピンをもつ運動量ゼロのゴールドスティーノを二つ余分に含んでいる．特に超対称性が自発的に破れると真空状態はゼロでないエネルギーを持ち，真空状態は同じエネルギーをもつ運動量ゼロのフェルミオン的状態一つと対をなさなければならない．より正確には運動量ゼロのゴールドスティーノを2個含む状態と真空状態は運動量ゼロのゴールドスティーノを1個含む状態二つと対をなす．対をなさないエネルギー・ゼロの状態つまり真空が現れるのは超対称性が破れていないときだけだ．

摂動論では適切な答えが得られないときでさえも超対称性の自発的破れの有用な判定基準として我々はエネルギーがゼロでない状態が対

をなすことを使うことができる. 全ての相互作用が弱いときには，スペクトルについての定性的な描像を得るために摂動論を使うことができる. 質量ゼロのフェルミオンを含まないエネルギーがゼロの n 個の真空状態があると樹木近似で分かった場合，弱結合ではこの n 個の真空状態と対をなすことができるエネルギーゼロのフェルミオン的な状態は存在しないことは確定的となり，これらの対を持たない状態は正確にエネルギー・ゼロでなければならないことが分かる. このとき，結合定数の強さを増加させる，あるいは理論の別のパラメータを変化させるにつれて状態は正のエネルギーからエネルギー・ゼロに変化したり，逆のことが起ったりするかもしれないが，状態が突然現れたり消えたりすることはない. (パラメータが変化すると, 場の値が大きい場合のラグランジアンの漸近的な振る舞いが変化するようなことが例外的にあり得る. すぐ後で見るようにこの場合は状態を生成したり消したりすることができる.) エネルギーがゼロでない各々の状態は反対の統計性をもつ別の状態と常に対をなすので, エネルギーがゼロからゼロでない場合への遷移やその逆はそのような対でのみ起こり得る. そこでエネルギー・ゼロのボゾン的な状態数からエネルギー・ゼロのフェルミオン的状態数を引いたものは, 理論のパラメータが変化しても場の値が大きい場合でのラグランジアンの振る舞いが変化しない限り変化しない. この差は**ウィッテン指標**[2] として知られている. F をフェルミオン数とすると, 形式的にこの指標は $\mathrm{Tr}\,(-1)^F$ と書ける. 前に述べたように状態が対をなすという事実から, このトレースはエネルギーがゼロでない状態からの寄与を受けないことが保証される. もしウィッテン指標がゼロでないならば，エネルギー・ゼロのある状態が存在しなければならず, 超対称性は破れることができない. 特に樹木近似でエネルギーがゼロの n 個の状態を持ち, しかもエネルギーがゼロのフェルミオンを一つも持たない理論があったとすると，弱結合でウィッテン指標は n だ. 弱結合では樹木近似はスペクト

ルの定性的な描像を与えることができ, 信頼できるものであり, 結合定数の強さが増加しても指標はnのままとどまる. そこで高次の効果や非摂動論的効果さえも超対称性を破らないだろうと確信できる.

ウィッテン指標の使用例としてカイラル超場を一つ持ち超ポテンシャルが(26.4.16)のような3次の多項式

$$f(\phi) = \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 + \tfrac{1}{6}g\phi^3$$

の場合のヴェス・ズミノ模型を考える. ここでϕは超場の複素スカラー場の成分だ. 26.4節で見たように, この模型では樹木近似で超対称性の破れは現れないが, 摂動論の高次で何が起きるのか, また非摂動論的効果は生じるのだろうか? mが大きくかつgが小さいときにエネルギー・スペクトルについて摂動論は良い近似を与える. この場合には方程式$\partial f(\phi)/\partial\phi = 0$の解$\phi = 0$と$\phi = -2m^2/g$に対応して, エネルギー・ゼロの近くに二つのボゾン的な状態が存在することが分かる. さらにエネルギー・ゼロの近くにはフェルミオン的な状態は一つも存在しないことも分かる. 最もエネルギーが低いフェルミオン的な状態は運動量がゼロでエネルギーが$|m|$近傍にあるフェルミオン1体の状態だ. 通常のスカラー場の理論では二つのボゾン的な状態のエネルギーが正確にゼロになることは期待できない. 樹木近似でそれぞれのエネルギーがゼロとなる場合でさえも, ($\phi = 0$と$\phi = -2m^2/g$の間の障壁を通過するトンネリングを含む) 高次の効果によりそれら二つの状態が混ざりあい, エネルギーがゼロではなくなることが期待される. (この障壁が通り抜けられなくなるのは体積無限大の極限のみだ.) しかし超対称的な理論ではこれらボゾン的状態と対をなすことのできる低エネルギーでのフェルミオン的な状態は無いので, これらの状態のエネルギーは正確にゼロでなければならない. したがってmが大きく, かつgが小さいときにはウィッテン指標は2となる. ウィッテン指標は理論のパラメータの変化に対して不変であるからgが大き

く摂動論が破綻する場合や, m がゼロとなり二つのポテンシャル井戸が融合する場合でさえもウィッテン指標は2にとどまる. (この場合, ウィッテン指標を直接計算することは易しくない. なぜなら樹木近似で質量ゼロのフェルミオンだけでなく質量ゼロのボゾンが存在するからだ.) ウィッテン指標がゼロではないので, ヴェス・ズミノ模型ではパラメータの値が何であろうと超対称性は厳密に破れていない.

同じ議論はカイラル・スカラー超場が複数ある理論でも一般に使うことができ, ウィッテン指標は正であり, 超対称性は自発的に破れていないことを示すことができる. 26.5節で議論したオラファテ模型は, 方向によっては,場の値が無限大になるにつれてポテンシャルが場の冪で無限大にならず定数のままとなり,平坦になっているので例外だ. 超対称性が破れるためにはウィッテン指標はゼロでなければならないが, ウィッテン指標がゼロであっても超対称性が必ず破れるとは必ずしも言えないという事実を示すための良い例がこれらの模型だ. 例えば, 26.5節で一つの例として使った超ポテンシャルを正準規格化した超場を用いて書くと, 任意パラメータ m, g, a を使って,

$$f(X, Y_1, Y_2) = mY_1(X - a) + gY_2X^2$$

という形にとることができる. このときポテンシャルは,

$$U(x, y_1, y_2) = |g|^2|x|^4 + |m|^2|x - a|^2 + |my_1 + 2gxy_2|^2$$

となる.ここで下付きの添字は左カイラル超場のスカラー成分を表している. m と a がゼロではなく, かつ g が小さい場合は摂動論によりスペクトルの良い評価を与えることができ, $x = a - 2|g|^2|a|^4/|m|^2$ の近傍にポテンシャルの最小点が存在することが分かる. この点においては真空のエネルギーは近似的に $|ga^2|^2V$ に等しい. このエネルギーはどの状態にも加わる定数部分なので, エネルギーがゼロの状態は存在せずウィッテン指標はゼロとなる. 超ポテンシャルの2階微分を

成分とする行列$\mathcal{M}$ (行および列はx, y_1, y_2の順で並んでいる) は, ここでは,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2gy_2 & m & 2gx \\ m & 0 & 0 \\ 2gx & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となっており, 固有値ゼロに対応する固有ベクトル$(0, 2gx, -m)$を持っている. したがって質量のないフェルミオンが一つ存在する. これは超対称性の破れに伴うゴールドスティーノだ. この真空と縮退しているフェルミオン的な状態はエネルギーと運動量がゼロのゴールドスティーノ1個からできている. (以前と同様に,真空と同じエネルギーを持ち反対向きのスピンを持つゴールドスティーノからなるフェルミオン的状態は二つ存在する. さらに,真空と同じエネルギーをもつボゾン的状態も二つ存在する. それらは真空状態と,二つの互いに反対向きのスピンを持つゴールドスティーノからなる状態だ.) $a \to 0$になるにつれて超対称性の破れは回復するかも知れないが(後で実際に回復することを見るのだが), ウィッテン指標は0のままでなければならない. この場合は質量ゼロのフェルミオンはもはやゴールドスティーノではないが, 連続性のためにその質量はゼロのままであることが要請され, 真空状態と対をなす. もちろん,これはパラメータの特定の孤立した値で超対称性が回復するような理論の一般的な特徴だ. 超対称性が破れたときにゴールドスティーノの役割をする質量ゼロのフェルミオンは, 超対称性が回復するパラメータの値においても連続性から質量ゼロのままであり(もはや, その点ではゴールドスティーノではないが), 真空は質量ゼロのフェルミオン状態と対をなしウィッテン指標はゼロのままとなる.

この模型を考えると, 超対称性を持つ理論のパラメータを変化させたときにウィッテン指標が変化しないことをいうには, 次の条件が必要であることが分かる. その条件というのは, 場の値が大きい時のラ

グランジアン密度の漸近的な振る舞いが変更されるようにパラメータを変化させてはいけないというものだ．この模型に小さな項を一つ付け加えて,超ポテンシャルが,

$$f(X, Y_1, Y_2) = mY_1(X - a) + gY_2X^2 + \tfrac{1}{2}\,\epsilon(Y_1^2 + Y_2^2)$$

となるようにし，平坦な方向が平坦でなくなる場合を考える．ここで ϵ は小さな質量パラメータだ．このとき，超対称性が破れない条件

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y_2}$$

には二つの解が存在する．これらの解では, x は2次方程式 $2g^2x^2 + m(x - a) = 0$ の根の一つであり, y_1 と y_2 は大きさが $1/\epsilon$ 程度，具体的には $y_1 = -m(x - a)/\epsilon$ と $y_2 = -gx^2/\epsilon$ だ．小さなパラメータ ϵ を導入したときにウィッテン指標が0から2まで変化できるのは，場の値が無限大のところから二つの新たなポテンシャルの最小値が現れてくるためだということが分かる．

ウィッテン指標がゼロとなっている理論において超対称性が破れているかどうかを決定するするのに, 保存則を適用して, 現れるかもしれない対について制限をし，新しい種類の指標を定義することがしばしば有用だ．もし K が超対称性生成子 Q_α と可換な量子演算子の場合(したがってハミルトニアンとも可換な場合)，エネルギーがゼロでなく,かつ K について定まった値を持つ全ての状態は, この状態とは反対の統計性を持ち, 同じエネルギーと運動量を持ち, かつ同じ K の値を持つ状態と対をなす．また,ウィッテン指標 $\mathrm{Tr}\,(-1)^F$ は(場の値が大きいところでのラグランジアンの漸近的な振る舞いを変化させないようにパラメータが変化する限り)理論のパラメータに依らないばかりでなく，$g(K)$ を保存量の任意の関数として $\mathrm{Tr}\,g(K)(-1)^F$ で与えられる**重み付きウィッテン指標**もまた理論のパラメータに依らない．このように「保存則を使うため」には体積 V が無限大になった

ときに保存則が破れていないという条件は必ずしも必要ではない．つまり K が超対称性生成子と交換するという条件のみが必要なのだ．

超対称性が破れている可能性を分析する場合，多くの異なった保存量についてのウィッテン指標の重み付き線形結合を用いることが時として有用だ．特に，

$$W_G = \sum_{h \in G} \mathrm{Tr}\left\{h\,(-1)^F\right\} \tag{29.1.6}$$

という量を考えよう．和はある対称群 G の全ての要素についてとる．(コンパクトな連続群の場合，この和は適切な不変測度をもつ群の体積についての積分と解釈する.) 自明な表現以外の既約表現について，有限群あるいはコンパクト群上で和を取り足しあげると「指標」$\mathrm{Tr}\,h$ はゼロになる．そこで，

$$W_G = \sum_f N(f)\,(-1)^f \tag{29.1.7}$$

となる．ここで，$N(f)$ はフェルミオン数 f を持つ状態のなかに G の自明な表現が現れる回数だ．言い換えると W_G は単なるウィッテン指標であるが G 不変な状態のみを使って評価したものだ．G が保存される限り W_G は理論のパラメータに依らず，その値がゼロでないとき，超対称性は破れていない．

29.4 節では保存則をこのように使って，ゲージ理論での超対称性の自発的破れを調べるが，もっと簡単な (しかし学究的な) 例が以前に議論したオラファテ型の模型でパラメータ a をゼロと置くことにより得られる．この場合，超ポテンシャルは，

$$f(X, Y_1, Y_2) = mY_1X + gY_2X^2 \tag{29.1.8}$$

であり，樹木近似ポテンシャル

$$U(x, y_1, y_2) = |m|^2|x|^2 + |g|^2|x|^4 + |my_1 + 2gxy_2|^2 \tag{29.1.9}$$

を与える．ウィッテン指標は $a \neq 0$ のときゼロとなるので，この場合もゼロとなることが分かるが，超対称性は破れているのだろうか? $a = 0$ の場合，樹木近似でポテンシャルがゼロになるような場の値 $x = y_1 = 0$ が存在する．しかし g についての高次の効果や非摂動論的効果により小さなエネルギーが対応する状態に与えられるかどうかをどうやって示すことができるだろうか? この問いに答えるために，この超ポテンシャル(したがってラグランジアン密度)はある離散的な対称性 K の下で不変であることに注意する．その離散的な対称性は，超場を，

$$KXK^{-1} = iX\ , \quad KY_1K^{-1} = -iY_1\ , \quad KY_2K^{-1} = -Y_2 \quad (29.1.10)$$

と変換するものだ．(この対称性は元の超ポテンシャルにある項 $-maY_1$ によって破れるので，K を使って得られる結果はその超ポテンシャルには適用できない．) $x = y_1 = 0$ であり，かつ y_2 が任意のときにポテンシャルはゼロになるので，g が小さいとき，摂動論を使ってエネルギーがゼロの近傍にボゾン的な真空状態が一つ存在することが言える．$y_2 = 0$ の場合，この真空は K の作用に対して偶だ．ゼロでない任意の $|y_2|$ に対しては $y_2 = \pm|y_2|$ であるエネルギーがゼロの二つの状態の線形結合をとることができる．ここでの二つの状態は K の作用に対して一つは偶であり，もう一つは奇だ．すでに見たように，ここでは Y_2 のフェルミオン成分である質量ゼロのフェルミオンが一つ存在するが，このフェルミオンは K の作用で奇なので，偶の真空状態とは対をなすことはできない．この理論の他のフェルミオンは全て樹木近似で質量 $|m|$ を持っており，g が小さいとき，それらも偶の真空状態と対を作ることができない．したがって g が小さいとき，偶の真空状態は厳密にエネルギーがゼロとなり，超対称性は破れていないと結論することができる．この場合は K の作用で偶となるボゾン的なゼロ・エネルギー状態が無限個あるために，重み付きウィッテン指標を計算するのは容易ではない．このボゾン的なゼロ・エネルギー状態は運動

量ゼロの0個あるいは2個のY_2フェルミオンと運動量ゼロの任意の偶数個のY_2ボゾンからできている．しかし$\mathrm{Tr}\,K(-)^F > 0$であることは明らかであり，この結果は($g \neq 0$である限り) gに依らないため，超対称性はどんな有限のgに対しても破れることはできない．

29.2　超対称性カレント和則

超対称性の破れの強さを記述するパラメータと真空のエネルギーの間の厳密で定量的な関係を与える和則を次に議論する．

以前と同様に，世界は体積Vの箱の内にあるとし，並進対称性を保つために周期的境界条件を課すことにする．このとき，反交換関係(25.2.36)の真空期待値は離散的状態$|X, \mathrm{Box}\rangle$についての和として，

$$\sum_X \left\langle \mathrm{VAC} \middle| Q_\alpha \middle| X, \mathrm{Box} \right\rangle \left\langle \mathrm{VAC} \middle| Q_\beta \middle| X, \mathrm{Box} \right\rangle^* + \sum_X \left\langle \mathrm{VAC} \middle| Q^*_\beta \middle| X, \mathrm{Box} \right\rangle \left\langle \mathrm{VAC} \middle| Q^*_\alpha \middle| X, \mathrm{Box} \right\rangle^*$$
$$= -2i\left(\gamma_\mu \beta\right)_{\alpha\beta} \left\langle \mathrm{VAC} \middle| P^\mu \middle| \mathrm{VAC} \right\rangle \tag{29.2.1}$$

と書けるだろう.「Box」という添字は状態がスカラー積に関してデルタ関数的に規格化されているのではなくて，クロネッカーのデルタを使って規格化されていることを表している．$\beta = \alpha$として，αについて足し上げ，式(25.2.37)を使うと，

$$\sum_{X,\alpha} \left| \left\langle \mathrm{VAC} \middle| Q_\alpha \middle| X, \mathrm{Box} \right\rangle \right|^2 = 4 \left\langle \mathrm{VAC} \middle| P^0 \middle| \mathrm{VAC} \right\rangle \tag{29.2.2}$$

となる．Q_αは4元運動量と可換なので，この和に寄与することができるのは真空と同じエネルギーを持ち3元運動量がゼロの状態のみだ．(29.2.2)に寄与する行列要素の体積依存性を調べるためには，N_X個の

粒子を含む箱を用いて規格化された状態 $|X, \mathrm{Box}\rangle$ は (3.4.3) により，連続的に規格化された対応する状態 $|X\rangle$ と,

$$\Big|X, \mathrm{Box}\Big\rangle = \Big((2\pi)^3/V\Big)^{N_X/2}\Big|X\Big\rangle \tag{29.2.3}$$

という形で関係していることに注意しよう．$\mathbf{p}_X = 0$ の状態については，超対称性カレントの時間成分 S^0_α の空間積分は因子 V をもう一つ付け加え, 箱を用いて規格化された $\mathbf{p}_X = 0$ の状態について,

$$\Big\langle \mathrm{VAC}\Big|Q_\alpha\Big|X, \mathrm{Box}\Big\rangle = (2\pi)^{3N_X/2}V^{1-N_X/2}\Big\langle \mathrm{VAC}\Big|S^0_\alpha(0)\Big|X\Big\rangle \tag{29.2.4}$$

が成り立つことが結論として言える．2π 回転の下での不変性から X は粒子数ゼロの状態でありえず，$V \to \infty$ のとき，(29.2.2) の最も主要な項は 1 粒子状態からのものだ．この極限では, (29.2.2) は,

$$(2\pi)^3 \sum_{X,\alpha}{}^{(0)} \Big|\Big\langle \mathrm{VAC}\Big|S^0_\alpha(0)\Big|X\Big\rangle\Big|^2 = 4\,\rho_{\mathrm{VAC}} \tag{29.2.5}$$

となる．ここで ρ_{VAC} は真空のエネルギー密度

$$\rho_{\mathrm{VAC}} \equiv \Big\langle \mathrm{VAC}\Big|P^0\Big|\mathrm{VAC}\Big\rangle/V \tag{29.2.6}$$

であり，上付きの添字 (0) は (29.2.5) において和をとる場合, 4 元運動量ゼロの 1 粒子状態についてのみ和をとることを表している．もちろん，これらはゴールドスティーノのヘリシティー状態二つのことだ.

以前と同様に, (29.2.5) から真空のエネルギー密度がゼロでない場合は，真空は超対称性変換で不変ではなく，むしろゴールドスティーノの 1 粒子状態に変換されることが分かる．逆に (29.2.2) から真空が超対称性の下で不変でなければ有限体積の箱における真空のエネルギーがゼロとなることはできないが，超対称性変換により真空のみが多粒子状態に移されると考えられる．その場合，真空のエネルギー密度は体積を大きくする極限でゼロとなる.

(29.2.5) におけるゴールドスティーノの1粒子状態の寄与を評価するために，ローレンツ不変性を使い真空とゴールドスティーノの1粒子状態 $|\mathbf{p},\sigma\rangle$ との間の超対称性カレントの行列要素を,

$$\left\langle \mathrm{VAC}\middle| S^\mu(0) \middle| \mathbf{p},\lambda\right\rangle = (2\pi)^{-3/2}\left[\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\left(\gamma^\mu F + ip^\mu F'\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\left(\gamma^\mu F^* + ip^\mu F'^*\right)\right] u(\mathbf{p},\lambda) \tag{29.2.7}$$

の形*に書く．ここで状態 $|\mathbf{p},\sigma\rangle$ は運動量 $\mathbf{p}$ とヘリシティー λ を持つ．また, $u(\mathbf{p},\lambda)$ は5.5節で導入した質量ゼロのディラック場の係数関数であり, F と F' は未知の定数だ．$u(\mathbf{p},\lambda)$ は運動量空間での質量ゼロのディラック方程式(5.5.42)を満たし，p^μ は光円錐上にあるので, 行列要素(29.2.7)は保存条件 $p_\mu\left\langle \mathrm{VAC}\middle| S^\mu(0)\middle|\mathbf{p},\lambda\right\rangle = 0$ を満たす．ヘリシ

---

*ローレンツ不変性のみから $(1+\gamma_5)/2$ と $(1-\gamma_5)/2$ に比例する行列それぞれに対して独立な係数 F_L,F'_L と F_R,F'_R を持った表式が得られる．関係式 $F_R = F_L^*$ と $F'_R = F'^*_L$ を課すのはCPT不変性の要請からだ．これを見るためには, 超対称性カレントのCPT変換性

$$\mathsf{CPT}\, S^\mu(x)(\mathsf{CPT})^{-1} = -\gamma_5 S^\mu(-x)^* = -\beta\epsilon S^\mu(-x)$$

(5.8節を見よ) と1粒子状態のCPT変換性

$$\mathsf{CPT}|\mathbf{p},\lambda\rangle = \chi_\lambda|\mathbf{p},-\lambda\rangle$$

を見なければならない．ここで χ_λ はヘリシティー状態の相対的な位相をどう定義するかに関係した位相因子だ．また，係数関数 $u(\mathbf{p},\lambda)$ が実である条件が必要となる．これらは定義

$$\langle\mathrm{VAC}|\psi_{\mathrm{REN}}(x)|\mathbf{p},\lambda\rangle = (2\pi)^{-3/2}\exp(ip\cdot x)\,u(\mathbf{p},\lambda)$$

により1粒子状態の係数関数に関係している．ここで $\psi_{\mathrm{REN}}(x)$ はくりこまれたマヨラナ場であり, CPT変換則

$$\mathsf{CPT}\,\psi_{\mathrm{REN}}(x)\,(\mathsf{CPT})^{-1} = \gamma_5\,\psi_{\mathrm{REN}}(-x)^* = \beta\,\epsilon\,\psi_{\mathrm{REN}}(-x)$$

を持ち, $u(\mathbf{p},\lambda) = \chi^*_\lambda\,\beta\,\epsilon\,u^*(\mathbf{p},-\lambda)$ を満たす．超対称性カレントと1粒子状態のCPT変換則とあわせて考えると, 関係式 $F_R = F^*_L$ と $F'_R = F'^*_L$ が得られる．

ティーについての和をとると,

$$\sum_{\lambda} u(\mathbf{p},\lambda)\,\bar{u}(\mathbf{p},\lambda) = -i\,\not{p}/2p^0$$

となる．(運動量$\mathbf{p}$とスピンλを持つ質量ゼロの粒子についてのディラック・スピノル$u(\mathbf{p},\lambda)$は$\mathbf{p}\to 0$の時にはうまく定義されない．しかし, (29.2.5)のXに関しての和を, 固定した方向に小さな運動量$\mathbf{p}$を持つ時のヘリシティーについての和と考えれば問題は生じない.) 多少の計算をすると,

$$4\,\rho_{\rm VAC} = {\rm Tr}\Bigg\{\left(F\frac{1+\gamma_5}{2} + F^*\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\gamma^0\frac{-i\not{p}\beta}{2p^0}(\gamma^0)^\dagger \times\left(F^*\frac{1+\gamma_5}{2} + F\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\Bigg\}$$

となることが分かるので,

$$\rho_{\rm VAC} = |F|^2/2 \tag{29.2.8}$$

となる．この表式についての別の証明はこの節の最後で与える．

パラメータFが軟ゴールドスティーノの相互作用に関して果たす役割は, 軟パイ粒子の相互作用に関して (19.4節で導入した) パラメータF_πが果たす役割とほとんど同じだ．任意の二つの状態XとYの間の超対称性カレントの行列要素は, 運動量移行$p\equiv p_X-p_Y$について$p^\mu=0$の点でゴールドスティーノ1体の極を一つ持つ項と, この極を持たない項へと,

$$\langle X|S^\mu(0)|Y\rangle = \Bigg\{\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)[\gamma^\mu F + ip^\mu F'] + \left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)[\gamma^\mu F^* + ip^\mu F'^*]\Bigg\}\left(\frac{-i\not{p}}{p^2}\right)M(X\to Y+g) + \langle X|S^\mu(0)|Y\rangle_{\rm no\ pole} \tag{29.2.9}$$

というように分離できる．ここで$\bar{u}M(X \to Y+g)$は4元運動量pを持ちディラック場の波動関数がuとなるゴールドスティーノ1個を放出する振幅であり，下付きの「no pole」という添字は4元運動量pについてゴールドスティーノ1体に関する極を持たない行列要素の項を表す．カレントS^μの保存によりp_μと縮約を取ったとき，これはゼロとなることが分かり，極限$p^\mu \to 0$ではゴールドスティーノの放出振幅は，**

$$M(X \to Y+g) \to -i\left\{\left(\frac{1+\gamma_5}{2F}\right)+\left(\frac{1-\gamma_5}{2F^*}\right)\right\}p_\mu\langle X|S^\mu(0)|Y\rangle_{\text{no pole}} \tag{29.2.10}$$

となる．

超対称性が自発的に破れたときにゴールドスティーノが存在することを証明するもう一つの和則が存在する．それはまたパラメータfと真空のエネルギー密度を，超対称性の破れの強さを特徴づけるD項と$\mathcal{F}$項に関係づける．(和則のこの使い方は，通常の対称性が自発的に破れた場合のゴールドストン・ボゾンの存在についての19.2節での第2の証明に類似している.) この和則を得るためには，有限体積であるという条件をもはや捨て去るが，超対称性を作用させた局所的な結果

$$\begin{aligned}\left[\left(\bar{S}^0(\mathbf{x},t)\,\alpha\right),\,\chi(\mathbf{y},t)\right] &= \left[\left(\bar{\alpha}\,S^0(\mathbf{x},t)\right),\,\chi(\mathbf{y},t)\right]\\ &= i\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,\delta\chi(\mathbf{x},t)+\cdots\end{aligned} \tag{29.2.11}$$

**振幅$\langle X|S^\mu(0)|Y\rangle_{\text{no pole}}$は$p^\mu \to 0$につれて$1/p\cdot k$のように振る舞う極を持つかも知れない．これらは，この行列要素において明白に排除されるゴールドスティーノのプロパゲーターからは現れない．しかし，過程$X \to Y$における運動量kの外線に超対称性カレントを挿入することにより生成される他の粒子のプロパゲーターからこれらの極は現れる．$p^\mu \to 0$の極限では(29.2.10)におけるこれらの極の寄与は軟ゴールドスティーノの放出や吸収についての振幅を上回るだろう．そのような極が現れるためには，互いに反対の統計性をもつ一対の縮退した粒子の間の遷移過程でゴールドスティーノが放出されなければならないだろう．しかし，それは超対称性が自発的に破れている理論では起りそうにない．軟ゴールドスティーノの相互作用は軟パイ粒子，軟光子，軟重力子の相互作用とはこの点で異なっている．

を使うことにより積分(29.1.3)の収束性の問題を避けることができる．ここで$\chi(x)$ は任意のフェルミオン的あるいはボゾン的な場であり，$\delta\chi(x)$ は微小パラメータ α を持ち作用を不変に保つ超対称性変換によって生成される $\chi(x)$ の変化だ．また，点々は $\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ の微分を含む項を表している．任意の左巻きのスピノル場 $\psi_L(x)$ と超対称性カレント $\bar{S}^\mu(y)$ の共変共役との反交換子の真空期待値を考えよう．中間状態の完全系 $|X\rangle$ について足しあげる(これには粒子の運動量についての積分が含まれる) ことにより, この真空期待値は,

$$\left\langle \mathrm{VAC}\middle|\left\{\psi_{L\alpha}(x)\,,\,\bar{S}^\mu_\beta(y)\right\}\middle|\mathrm{VAC}\right\rangle=\int d^4p\; e^{ip\cdot(x-y)}\;\left[G^\mu_{\alpha\beta}(p)+\tilde{G}^\mu_{\alpha\beta}(-p)\right] \tag{29.2.12}$$

という形に書ける．ここで,

$$G^\mu_{\alpha\beta}(p)\equiv\sum_X\delta^4(p-p_X)\left\langle\mathrm{VAC}\middle|\psi_{L\alpha}(0)\middle|X\right\rangle \times\left\langle X\middle|\bar{S}^\mu_\beta(0)\middle|\mathrm{VAC}\right\rangle\,, \tag{29.2.13}$$

$$\tilde{G}^\mu_{\alpha\beta}(p)=\sum_X\delta^4(p-p_X)\left\langle\mathrm{VAC}\middle|\bar{S}^\mu_\beta(0)\middle|X\right\rangle \times\left\langle X\middle|\psi_{L\alpha}(0)\middle|\mathrm{VAC}\right\rangle \tag{29.2.14}$$

だ．ローレンツ不変性によって, 行列 $G^\mu(p)$ と $\tilde{G}^\mu(p)$ は,

$$G^\mu(p)=\theta(p^0)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\left[\gamma^\mu G^{(1)}(-p^2)+\not{p}p^\mu G^{(2)}(-p^2) +p^\mu G^{(3)}(-p^2)+\not{p}\gamma^\mu G^{(4)}(-p^2)\right]\,, \tag{29.2.15}$$

$$\tilde{G}^\mu(p)=\theta(p^0)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\left[\gamma^\mu \tilde{G}^{(1)}(-p^2)+\not{p}p^\mu \tilde{G}^{(2)}(-p^2) +p^\mu \tilde{G}^{(3)}(-p^2)+\not{p}\gamma^\mu \tilde{G}^{(4)}(-p^2)\right] \tag{29.2.16}$$

という形でなければならない．$-p^2$ を m^2 に置き換え, 因子 $\delta(p^2+m^2)$ をかけて, m^2 について積分しても (29.2.15) と (29.2.16) の右辺は変化しない．このようにして (29.2.12) は,

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^{-3}\Big\langle \mathrm{VAC}\Big|\Big\{\psi_L(x)\,,\,\bar{S}^\mu(y)\Big\}\Big|\mathrm{VAC}\Big\rangle \\
&=\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\int_0^\infty dm^2\,\Big[\gamma^\mu G^{(1)}(m^2)-\not\partial\partial^\mu G^{(2)}(m^2) \\
&\quad -i\partial^\mu G^{(3)}(m^2)-i\not\partial\gamma^\mu G^{(4)}(m^2)\Big]\Delta_+(x-y,m) \\
&\quad +\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\int_0^\infty dm^2\,\Big[\gamma^\mu \tilde{G}^{(1)}(m^2)-\not\partial\partial^\mu \tilde{G}^{(2)}(m^2) \\
&\quad -i\partial^\mu \tilde{G}^{(3)}(m^2)-i\not\partial\gamma^\mu \tilde{G}^{(4)}(m^2)\Big]\Delta_+(y-x,m)
\end{aligned}
\tag{29.2.17}
$$

となる．ここで $\Delta_+(x,m)$ は標準的な関数

$$
\Delta_+(x,m)\equiv(2\pi)^{-3}\int d^4p\,\theta(p^0)\,\delta(p^2+m^2)\,\exp(ip\cdot x) \tag{29.2.18}
$$

だ．因果律から (29.2.17) の左辺の反交換子は $x-y$ が空間的に離れている場合ゼロにならなければならない．そのように離れている場合は, $\Delta_+(x-y,m)$ は $x-y$ に関して偶関数であり, 空間的に離れている全ての場合について (29.2.17) がゼロとなるのは,

$$
\begin{aligned}
&G^{(1)}(m^2)=-\tilde{G}^{(1)}(m^2)\,,\quad G^{(2)}(m^2)=-\tilde{G}^{(2)}(m^2)\,,\\
&G^{(3)}(m^2)=+\tilde{G}^{(3)}(m^2)\,,\quad G^{(4)}(m^2)=+\tilde{G}^{(4)}(m^2)
\end{aligned}
\tag{29.2.19}
$$

の場合のみであり，一般の $x-y$ については (29.2.17) は,

$$
\begin{aligned}
&(2\pi)^{-3}\Big\langle \mathrm{VAC}\Big|\Big\{\psi_L(x)\,,\,\bar{S}^\mu(y)\Big\}\Big|\mathrm{VAC}\Big\rangle \\
&=\int_0^\infty dm^2\,\Big[G^{(1)}(m^2)\gamma^\mu-G^{(2)}(m^2)\,\not\partial\partial^\mu-iG^{(3)}(m^2)\partial^\mu \\
&\quad -iG^{(4)}(m^2)\,\not\partial\gamma^\mu\Big]\Delta(x-y,m)\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{29.2.20}
$$

となる．ここで通常通り，

$$\Delta(x-y,m) \equiv \Delta_+(x-y,m) - \Delta_+(y-x,m) \tag{29.2.21}$$

と定義した．次に超対称性カレントの保存条件 (29.1.2) を課す．その条件から ($\Box\Delta = m^2\Delta$ なので),

$$G^{(1)}(m^2) = m^2 G^{(2)}(m^2)\ , \quad m^2 G^{(3)}(m^2) = -m^2 G^{(4)}(m^2) \tag{29.2.22}$$

を得る．最後に，これらのスペクトル関数を超対称性の破れに関係づけなければならない．$x^0 = y^0$ の場合，

$$\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{y},0,m) = 0\ , \quad \dot{\Delta}(\mathbf{x}-\mathbf{y},0,m) = -i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

に注意しよう．(29.2.20) で $x^0 = y^0 = t$ かつ $\mu = 0$ と置くと，

$$\Big\langle \mathrm{VAC}\Big|\Big\{\psi_L(\mathbf{x},t)\,,\,\bar{S}^0(\mathbf{y},t)\Big\}\Big|\mathrm{VAC}\Big\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right) \times \int_0^\infty dm^2\,\Big[G^{(3)}(m^2) + G^{(4)}(m^2)\Big] \tag{29.2.23}$$

を得る．微小なマヨラナ・フェルミオン的な超対称性変換パラメータ α と右辺との縮約をとり, (29.2.11) を使うと,

$$i\Big\langle\delta\psi_L\Big\rangle_{\mathrm{VAC}} = (2\pi)^3\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\alpha\int_0^\infty dm^2\ \Big[G^{(3)}(m^2) + G^{(4)}(m^2)\Big] \tag{29.2.24}$$

を得る．しかし，(29.2.22) により (29.2.24) における m^2 上の積分での被積分関数は, おそらく $m^2 = 0$ の点を除いてゼロだ．そこで結果として,

$$G^{(3)}(m^2) + G^{(4)}(m^2) = \delta(m^2)\mathcal{G} \tag{29.2.25}$$

となることが分かる．ここで定数係数 $\mathcal{G}$ は,

$$i\Big\langle\delta\psi_L\Big\rangle_{\mathrm{VAC}} = (2\pi)^3\mathcal{G}\alpha_L \tag{29.2.26}$$

により与えられる．26.4節と27.4節で見たように，超対称性の破れの合図は$\delta\psi$の真空期待値の出現だ．ここで$\delta\psi$は超対称変換の下での1個以上のスピノル場ψについての変化だ．(29.2.25)と(29.2.26)から，そのようなスピノル場について，スペクトル関数$G^{(3)}(m^2)+G^{(4)}(m^2)$は$m^2=0$にデルタ関数的な特異点を持ち，(29.2.13)または(29.2.14)における状態和について考えたとき，その特異性は，質量ゼロの1粒子状態$|g\rangle$の出現からのみ起りうることが分かる．行列要素$\langle \mathrm{VAC}|\psi|g\rangle$あるいは$\langle g|\psi|\mathrm{VAC}\rangle$がゼロとならないためには，この質量ゼロの粒子はスピン1/2を持たなければならない．これはゴールドスティーノだ．

運動量$\mathbf{p}$とヘリシティーλを持つゴールドスティーノの1粒子状態$|\mathbf{p},\lambda\rangle$のスペクトル関数への寄与を計算しよう．ローレンツ不変性により，(29.2.13)における(くりこまれたゴールドスティーノ場のみならず)一般的なフェルミオン場の行列要素は，

$$\left\langle \mathrm{VAC}\middle|\psi(0)\middle|\mathbf{p},\lambda\right\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left[N\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)+N^*\left(\frac{1-\gamma_5}{2}\right)\right]u(\mathbf{p},\lambda) \tag{29.2.27}$$

の形となる†．ここでNは特定のフェルミオン場を特徴付ける定数だ．また，(29.2.13)におけるデルタ関数は，

$$\delta^4(p-p_g)=2p^0\delta(p^2)\theta(p^0)\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}_g)$$

だ．(29.2.7)とあわせて考えると，

$$\left[G^\mu_{\alpha\beta}(p)\right]_1=\frac{N}{(2\pi)^3}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\theta(p^0)\delta(p^2)\ \not{p}\left[\gamma^\mu F+ip^\mu F'\right]$$

となる．ここで，下付き添字1はゴールドスティーノ1個の寄与を表し

---

†以前と同様に，ローレンツ不変性により$(1+\gamma_5)$と$(1-\gamma_5)$それぞれについて独立な係数N_LとN_Rが許される．1粒子状態に対してCPT変換を使い，この節の最初の脚注で議論した係数関数が実関数であることと一般的なフェルミオン場1個についてのCPT変換性$\mathrm{CPT}\psi(x)(\mathrm{CPT})^{-1}=\beta\epsilon\psi(-x)$を使うと$N_L=N_R^*$が分かる．

ている．これと(29.2.15)とを比較することにより，

$$\begin{aligned} \left[G^{(2)}(m^2)\right]_1 &= i(2\pi)^{-3}NF'\delta(m^2)\ , \\ \left[G^{(4)}(m^2)\right]_1 &= (2\pi)^{-3}NF\delta(m^2)\ , \\ \left[G^{(1)}(m^2)\right]_1 &= \left[G^{(3)}(m^2)\right]_1 = 0 \end{aligned} \tag{29.2.28}$$

が示せる．したがって(29.2.25)と(29.2.26)により，

$$i\left\langle \delta\psi_L \right\rangle_{\text{VAC}} = NF\alpha_L \tag{29.2.29}$$

となる．超対称性変換の下で，フェルミオン場の変化がゼロでない真空期待値を持つ場合は，明らかにその場についてのN因子はゼロとなることはできない．そこで，これらのスペクトル関数に寄与を及ぼすゴールドスティーノの1粒子状態が存在しなければならない．

もう少し具体的には，左カイラル・スカラー超場Φ_{Ln}のフェルミオン成分ψ_{Ln}は超対称性変換則(26.3.15)

$$\delta\psi_{Ln} = \sqrt{2}\partial_\mu\phi_n\,\gamma^\mu\,\alpha_R + \sqrt{2}\mathcal{F}_n\,\alpha_L \tag{29.2.30}$$

に従うことに注意しよう．一方で，(27.3.5)によりゲージーノ場の超対称変換は，

$$\delta\lambda_A = \left(\tfrac{1}{4}\ f_{A\mu\nu}\,[\gamma^\nu\ ,\ \gamma^\mu] + i\gamma_5 D_A\right)\alpha \tag{29.2.31}$$

と与えられる．つまり，真空とゴールドスティーノ1粒子状態一つの間でのψ_nとλ_Aの行列要素においてはN因子は，

$$N_n = iF^{-1}\sqrt{2}\left\langle \mathcal{F}_n \right\rangle_{\text{VAC}}\ ,\quad N_A = -F^{-1}\left\langle D_A \right\rangle_{\text{VAC}} \tag{29.2.32}$$

と与えられる．

樹木近似で結果(29.2.32)がどう現れるかについて見てみよう．ゲージ超場とカイラル超場からなるくりこみ可能な理論では，(27.4.30)か

らフェルミオンの質量行列の左巻き部分は,

$$
\begin{aligned}
M_{nm} &= \left(\frac{\partial^2 f(\phi)}{\partial\phi_n\partial\phi_m}\right)_{\phi=\phi_0} , \\
M_{nA} &= M_{An} = i\sqrt{2}(t_A\phi_0)_n^* , \quad M_{AB} = 0
\end{aligned}
\tag{29.2.33}
$$

となる．ポテンシャルが最小となる場合, 真空の場の値 ϕ_{n0} は (27.4.9) により与えられるので,

$$
0 = \left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi_n}\right)_0 = -\sum_m M_{nm}\mathcal{F}_{m0} + \sum_A \left(\phi_0^\dagger t_A\right)_n D_{A0} \tag{29.2.34}
$$

となる．ここで $\mathcal{F}$ と D

$$
\mathcal{F}_n = -\Big(\partial f(\phi)/\partial\phi_n\Big)^* , \quad D_A = \xi_A + \sum_{nm}\phi_n^*(t_A)_{nm}\phi_m
$$

は (27.4.6) と (27.4.7) により与えられ, 下付きの添字0 は $\phi_n = \phi_{n0}$ と置いたことを表している．更に, 超ポテンシャルのゲージ不変性から, ϕ の全ての値に対して,

$$
\sum_n \mathcal{F}_n\Big(t_B\phi\Big)_n^* = 0 \tag{29.2.35}
$$

が要請される．したがって, 左巻きクォークの質量行列 M は $Mv = 0$ を満たす固有ベクトル v

$$
v_n = \sqrt{2}\mathcal{F}_{n0} , \qquad v_A = iD_{A0} \tag{29.2.36}
$$

を一つ持つ．このようにして樹木近似のレベルでは, 左巻きフェルミオンを定まった質量を持つ粒子のくりこまれた場で展開したならば, ψ_{Ln} と λ_{AL} におけるグラビティーノ場の係数はそれぞれ $\sqrt{2}\mathcal{F}_{n0}$ と iD_{A0} に比例し, (29.2.32) に一致する．

定まった質量を持つ粒子からなるくりこまれた場にスピノル場 ψ_{Ln} と λ_A を関係づける行列がユニタリーであるように, これらのスピノ

ル場を規格化すると，

$$\sum_n |N_n|^2 + \sum_A |N_A|^2 = 1 \tag{29.2.37}$$

となり，(29.2.32) から非摂動論的な結果

$$|F|^2 = 2\sum_n \left|\left\langle \mathcal{F}_n \right\rangle_{\rm VAC}\right|^2 + \sum_A \left|\left\langle D_A \right\rangle_{\rm VAC}\right|^2 \tag{29.2.38}$$

が得られる．$|F|^2$ についての結果 (29.2.38) から密度の真空期待値 (29.2.8) を補助場の真空期待値で表すことができ，

$$\rho_{\rm VAC} = \sum_n \left|\left\langle \mathcal{F}_n \right\rangle_{\rm VAC}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_A \left|\left\langle D_A \right\rangle_{\rm VAC}\right|^2 \tag{29.2.39}$$

となる．これはゼロ次近似での結果 (27.4.9) の非摂動論的な一般化だ．これにより超対称性が破れないためには条件 $\langle \mathcal{F}_n \rangle = \langle D_A \rangle = 0$ が必要十分であるという 27.6 節で使った結果が確証される．

* * *

有限体積の設定を使わずに (29.2.8) がどのように得られるかを見ることは教訓的だ．このために二つの超対称性カレントの反交換子の真空期待値を考える．前の節と同様に，空間的に離れている場合に反交換子がゼロとなることとローレンツ不変性を使うと，

$$\begin{aligned}\left\langle \mathrm{VAC}\middle|\left\{S^\mu(x)\,,\,\bar{S}^\nu(y)\right\}\middle|\mathrm{VAC}\right\rangle &= -i\int dm^2\Big[H^{(1)}(m^2)\gamma^\mu\partial^\nu \\ &+H^{(2)}(m^2)\gamma^\nu\partial^\mu + H^{(3)}(m^2)\,\not\partial\partial^\mu\partial^\nu + H^{(4)}(m^2)\,\not\partial\eta^{\mu\nu} \\ &+H^{(5)}(m^2)\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\lambda\gamma_\rho\Big]\Delta(x-y,m^2) \\ &+\cdots\end{aligned} \tag{29.2.40}$$

が分かる．ここで，

$$\begin{aligned}\int dX\,\delta^4(p-p_X)\left\langle \mathrm{VAC}\middle|S^\mu_\alpha(0)\middle|X\right\rangle\left\langle X\middle|\bar{S}^\nu_\beta(0)\middle|\mathrm{VAC}\right\rangle &= H^{(1)}(-p^2)\gamma^\mu p^\nu \\ +H^{(2)}(-p^2)\gamma^\nu p^\mu - H^{(3)}(-p^2)\,\not p p^\mu p^\nu + H^{(4)}(-p^2)\,\not p\eta^{\mu\nu} \\ +H^{(5)}(-p^2)\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}p_\lambda\gamma_\rho + \cdots\end{aligned} \tag{29.2.41}$$

であり，(29.2.40) と (29.2.41) の点々は, 独立な共変的ディラック行列 $1, \gamma_5$ $, \gamma_5\gamma_\sigma$ $, [\gamma_\sigma, \gamma_\tau]$ の一次結合を表しているが，ここでは直接には関係がないものだ．カレントがマヨラナであることと (26.A.20) とから，スペクトル関数 $H^{(i)}$ は全て実であり, 超対称性カレントの保存から，

$$H^{(1)}(m^2) = H^{(2)}(m^2) = -m^2\, H^{(3)}(m^2) - H^{(4)}(m^2) \qquad (29.2.42)$$

と，

$$m^2 H^{(1)}(m^2) = 0 \qquad (29.2.43)$$

が分かる．(29.2.40) において $\mu = \nu = 0$ かつ $x^0 = y^0$ と置き，$\mathbf{x}$ について積分し，(29.2.42) を使うと，

$$\begin{aligned}
&\Big\langle \mathrm{VAC} \Big| \Big\{ Q\,,\, \bar{S}^0(0) \Big\} \Big| \mathrm{VAC} \Big\rangle \\
&= (2\pi)^3 \beta \int dm^2 \Big[H^{(1)}(m^2) + H^{(2)}(m^2) \\
&\qquad + m^2\, H^{(3)}(m^2) + H^{(4)}(m^2) \Big] + \cdots \\
&= (2\pi)^3 \beta \int dm^2\, H^{(1)}(m^2) + \cdots
\end{aligned} \qquad (29.2.44)$$

となる．この反交換子を評価するために，まずこれを，

$$\Big\{ Q\,,\, \bar{S}^\nu(x) \Big\} = -2i\gamma_\mu T^{\mu\nu}(x) + \cdots \qquad (29.2.45)$$

と書く．ここで $T^{\mu\nu}(x)$ はあるテンソル演算子であり，点々は以前と同じく独立な共変的ディラック行列のある線形結合を表している．Q と S^μ がマヨラナであることから $T^{\mu\nu}(x)$ はエルミートだと分かる．超対称性カレントの保存から $T^{\mu\nu}(x)$ は，

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \qquad (29.2.46)$$

の意味で保存されることが分かる．また反交換関係 (25.2.36) から，

$$\int d^3x\, T^{\mu\,0}(x) = P^\mu \qquad (29.2.47)$$

が分かる．これらの性質により$T^{\mu\nu}$をエネルギー・運動量テンソルと同一視してもよいことになる．これは一般には7.4節で議論した対称エネルギー・運動量テンソル$\Theta^{\mu\nu}$と等しくはならないが，(29.2.47)からエネルギー密度T^{00}とΘ^{00}との差は，3元運動量ゼロの状態に寄与することができない空間微分項のみだ．そこで真空のエネルギー密度は，

$$\rho_{\rm VAC} = \left\langle {\rm VAC} \middle| T^{00} \middle| {\rm VAC} \right\rangle \tag{29.2.48}$$

で与えられる．こうして(29.2.44)と(29.2.45)から，

$$2\rho_{\rm VAC} = (2\pi)^3 \int dm^2\, H^{(1)}(m^2) \tag{29.2.49}$$

を導くことができる．しかし，(29.2.43)により$H^{(1)}(m^2)$は，おそらく$m^2=0$を除いてゼロだと分かり，

$$H^{(1)}(m^2) = 2(2\pi)^{-3}\delta(m^2)\rho_{\rm VAC} \tag{29.2.50}$$

となる．したがって，真空のエネルギー密度がゼロでないと，質量ゼロのフェルミオンやゴールドスティーノが必然的に存在することが再び分かる．(29.2.7)と使うと，スペクトル関数へのゴールドスティーノ1粒子の寄与の直接的な計算から，

$$H^{(1)}(m^2) = (2\pi)^{-3}\delta(m^2)\,|F|^2 \tag{29.2.51}$$

が得られる．これと(29.2.50)とを比較すると，真空のエネルギー密度についての以前の結果(29.2.8)が得られる．

29.3　超ポテンシャルへの非摂動論的補正

ゲージ超場とカイラル超場からなる一般の超対称性理論の超ポテンシャルは，摂動論のあらゆる有限次でくりこみを受けないことを27.6節で見た．そこで超対称性が樹木近似で破れていない場合は，ウィル

ソン流の有効ラグランジアンへの非摂動論的効果によってのみ超対称性を破ることが可能だ．これらの補正の一般的な解析をここで取り上げる．これらは1980年代初期のアフレック・デイビス・ダイン・サイバーグ[3]による一連の論文において，任意の数のカラーとフレーバーを持った量子色力学の超対称性版の場合に特別の関心をはらって，調べつくされた．ここでは一般の超対称ゲージ理論の幾分簡単化した場合の解析を，27.7節で既に使ったサイバーグ[4]の最近の正則性の議論に基づいて調べよう．

非摂動論的効果を調べるために，ここでは再び一般のくりこみ可能な超対称性理論を考えるが，今度は可能なθ項をラグランジアン密度に入れ，

$$\mathcal{L} = \left[\Phi^\dagger\, e^{-V}\, \Phi\right]_D + 2\,\mathrm{Re}\left[f(\Phi)\right]_{\mathcal{F}} + \mathrm{Re}\left[\frac{\tau}{8\pi i}\sum_{A\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L}\, W_{A\beta L}\right]_{\mathcal{F}} \tag{29.3.1}$$

としておく．ここで超ポテンシャル$f(\Phi)$は，左カイラル超場についてのゲージ不変な3次の多項式であり，τは(27.3.23)のパラメータ

$$\tau = \frac{4\pi i}{g^2} + \frac{\theta}{2\pi} \tag{29.3.2}$$

だ．27.6節と同様に，ゲージ不変な左カイラル超場の対YとTを1組外線に導入し，ラグランジアン密度を，

$$\mathcal{L}^\sharp = \left[\Phi^\dagger\, e^{-V}\, \Phi\right]_D + 2\,\mathrm{Re}\left[Y f(\Phi)\right]_{\mathcal{F}} + \mathrm{Re}\left[\frac{T}{8\pi i}\sum_{A\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L}\, W_{A\beta L}\right]_{\mathcal{F}} \tag{29.3.3}$$

で置き換える．YとTのスピノル成分と補助場成分をゼロと置き，それぞれのスカラー成分を$y = 1, t = \tau$とすると，このラグランジアン密度は(29.3.1)と同じになる．27.6節の解析で拠り所としていた二つの対称性は非摂動論的効果により一般に両方とも無効になる．ここでの

記法で，実のξを使って$T \to T+\xi$ と書いた並進は，$\sum_A \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma}$を時空上で積分したとき，ゼロでない積分値を持つことができるので対称性ではない．22章で議論したアノマリーが，Rカレントにゼロでない発散を与えるので，もともとの(TとYがRの値0と+2を持つ) R不変性は対称性ではない．θ_L とθ_R がそれぞれ$R=+1$ と$R=-1$を持ち，V_A とΦ_nがR中性であり，フェルミオン場λ_{AL} とψ_{nL} がそれぞれ$R=+1$ と$R=-1$を持つようにとると，(22.2.26) はここでは，

$$\partial_\mu J^\mu_R = -\frac{1}{32\pi^2}\Big(C_1 - C_2\Big)\sum_A \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma} \tag{29.3.4}$$

となる．C_1 とC_2は (17.5.33) と (17.5.34) で定義された定数であり，

$$\sum_{CD} C_{ACD}C_{BCD} = C_1\,\delta_{AB}\ ,\quad \mathrm{Tr}\,\{t_A t_B\} = C_2\,\delta_{AB} \tag{29.3.5}$$

を満たす．ここでトレース*は，左カイラル超場の全ての種類についてとる．例えば文献3で調べられた量子色力学の一般化された超対称版の場合で，ゲージ群が$SU(N_c)$であり，その基本表現と複素共役表現にある左カイラル・クォーク超場Q_n と$\overline{Q}_n$がN_f対ある場合，これらの定数は($n_f = 2N_f$として) (17.5.35) で与えられる値，

$$C_1 = N_c\ ,\quad C_2 = N_f$$

となる．

T並進とR不変性は非摂動論的効果で無効になるが，ほとんど同じくらい強力な対称性が一つ残っている．任意の実数φを持つ一般のR

*ゲージーノは反粒子を持たず，(29.3.5) のトレースをとる時，反粒子を粒子とは別々に勘定しているので，(29.3.4) の分母には16ではなく因子32が現れる．また，我々の慣例では27.3節の終りで記したように，ゲージ結合定数をゲージ場に含めており，構造定数や行列生成子t_Aには含めていない．したがって，ゲージ代数の標準的な$SU(2)$部分代数t_A,t_B,t_C に対して構造定数が$C_{ABC}=\epsilon_{ABC}$となるようにゲージ生成子は規格化されている．

変換

$$\theta_L \to e^{i\varphi}\theta_L\ ,\quad \Phi \to \Phi\ ,\quad V_A \to V_A\ ,\quad Y \to e^{2i\varphi}Y \tag{29.3.6}$$

を考える．これはラグランジアン密度 (29.3.3) の T によらない項を不変に保つが, (29.3.4) によると, 量子効果はこの対称性を破る．それはまるでラグランジアン密度の内に $\Delta\mathcal{L}$ という項があり,

$$\Delta\mathcal{L} \to \Delta\mathcal{L} - \frac{1}{32\pi^2}\Big(C_1 - C_2\Big)\sum_A \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_A^{\mu\nu} f_A^{\rho\sigma}\varphi$$

と変換されるのと同じだ．(27.3.18) を思い出すと, これは T を,

$$T \to T + (C_1 - C_2)\varphi/\pi \tag{29.3.7}$$

と変換すると相殺できる．$W_{A\alpha L}$ は $R = 2$ を持つので, 非摂動論的効果を含む理論全体は, (29.3.6) と (29.3.7) を組み合わせた変換の下で不変だ．特に，超場 $\exp(2i\pi T)$ は $R = 2\,(C_1 - C_2)$ を持ち，$T = \tau$ のとき θ について周期的だ．

紫外発散の切断を再び導入し，有効「ウィルソン流」ラグランジアン

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\sharp_\lambda = &\Big[\mathcal{A}_\lambda(\Phi, \Phi^\dagger, V, T, T^\dagger, Y, Y^\dagger, \mathcal{D}\cdots)\Big]_D \\ &+2\,\mathrm{Re}\left[\frac{T}{8\pi i}\sum_{A\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta}W_{AL\alpha}W_{AL\beta} + \mathcal{B}_\lambda(\Phi, W_L, T, Y)\right]_{\mathcal{F}}\end{aligned} \tag{29.3.8}$$

を考える．ここで, $\mathcal{A}_\lambda$ と $\mathcal{B}_\lambda$ は共に, 書いてある引数についてのゲージ不変な関数だ．T の並進 (29.3.7) が R 変換 (29.3.6) におけるアノマリーを相殺し続けるように, T に比例する項は関数 $\mathcal{B}_\lambda$ から分離してある．こうすると，組み合わされた変換 (29.3.6),(29.3.7) の下での不変性から, 関数 $\mathcal{B}_\lambda$ の各項は $\exp(2i\pi T)$ の冪に比例しなければならないことが分かり，これらの項はまた定まった R の値を持つ．

さらに，$\mathcal{B}_\lambda$ に現れるのは $\exp(2i\pi T)$ の正冪のみだ．(27.3.24) によると，有効ラグランジアンに T^* ではなく T についての正則な寄与をするのは正の巻き付き数 $\nu \geq 0$ を持つインスタントンのみだ．そして, これらは因子 $\exp(2i\pi\nu T)$ を与える．もっと一般に $T=\tau$ のとき, $\exp(2ia\pi T)$ の任意の冪は因子 $\exp(-8\pi^2 a/g^2)$ を通じてゲージ結合定数に依存し，g が小さい場合に非摂動論的効果が抑制されるためには, a は正でなければならない．結果として非摂動論的効果は演算子 $\exp(2i\pi aT)$ を通じて $\mathcal{L}^\sharp_\lambda$ に現れ，これは $C_1 > C_2$, $C_1 = C_2$, $C_1 < C_2$ に応じて, それぞれ正定値，ゼロ，負定値の R の値を持つ．(上で記した量子色力学の一般化された超対称版では, これはそれぞれ $N_c > N_f$, $N_c = N_f$, $N_c < N_f$ に対応している.) これらの場合のそれぞれについて考えよう．

$C_1 > C_2$

この場合, $a > 0$ として冪 $\exp(2ia\pi T)$ は R について正定値の値を持つ．その R は (29.3.7) により $R = 2(C_1 - C_2)a$ と与えられる．$\mathcal{B}_\lambda$ におけるある項が因子 $W_{A\alpha L}$ を含んでいると, それはローレンツ不変性から少なくともこの因子を二つ含まなければならず，$\mathcal{B}_\lambda$ における $R=2$ の項を構成する方法は次の三つの場合に限られる．それらは, 二つの W を持ち Y や T に依存性しない場合，一つの Y を持ち W や T に依存性しない場合，$\exp(2i\pi T/(C_1 - C_2))$ の因子を一つ持ち W や Y に依存性しない場合だ．そこで,

$$\mathcal{B}_\lambda = Y f_\lambda(\Phi) + \sum_{\alpha\beta AB} \epsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L} W_{B\beta B}\, \ell_{\lambda AB}(\Phi) + \exp\left(\frac{2i\pi T}{C_1 - C_2}\right) v_\lambda(\Phi) \tag{29.3.9}$$

と書ける．$f_\lambda(\Phi)$ は Y や T に依らないので，それはちょうど摂動論での樹木近似での超ポテンシャル

$$f_\lambda(\Phi) = f(\Phi) \tag{29.3.10}$$

になっていなければならない．同様に $\ell_{\lambda AB}(\Phi)$ は Y や T に依らないので，Φ と $\Phi^\dagger$ の数は等しくなければならない．$\ell_{\lambda AB}(\Phi)$ は $\Phi^\dagger$ に依らないので Φ 依存性を持つこともできない．このときゲージ不変性から(単純ゲージ群について) $\ell_{\lambda AB}(\Phi)$ は δ_{AB} に比例していることが要請され，T や Y に依存しないので，27.6節の冪勘定の議論から δ_{AB} の係数として可能なものはウィルソン流の変化するゲージ結合定数の逆2乗への1ループの寄与のみだ．

変化するゲージ結合定数について，もっと陽に議論をすすめるために，フェルミオンを持つ超対称的でないゲージ理論での(18.7.2)は，1ループのくりこみ群方程式

$$\lambda\frac{dg_\lambda}{d\lambda} = bg_\lambda^3 \tag{29.3.11}$$

を与えることを思いだそう．ここで，

$$b = -\frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{11}{12}C_1 - \frac{1}{6}C_2\right) \tag{29.3.12}$$

であり，反フェルミオンの左カイラル状態を粒子の左カイラル状態とは別々に勘定しているので，C_2 の係数は $-1/3$ ではなく $-1/6$ にとっている．28.2節で見たように，ゲージーノの効果は C_1 項に因子 $9/11$ をかけることだ．一方，左カイラル超場（例えばスクォークやスレプトン）のスカラー成分の効果は，C_2 項に因子 $3/2$ をかけることだ．したがって，超対称性理論では，(29.3.12)は，

$$b = -\frac{1}{16\pi^2}\left(3C_1 - C_2\right) \tag{29.3.13}$$

となる．変化するゲージ結合定数についての方程式(29.3.11)の解は，

$$g_\lambda^{-2} = g^{-2} + \frac{3C_1 - C_2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\lambda}{K}\right) \tag{29.3.14}$$

となる．ここで K は紫外発散をもつ裸のゲージ結合定数 g に意味を与えるように導入した紫外切断だ．

今までの結果を要約するために，$T = \tau$ かつ $Y = 1$ と置くと $C_1 > C_2$ についてのウィルソン流有効ラグランジアンは，

$$\mathcal{L}^\sharp_\lambda = \Big[\mathcal{A}_\lambda(\Phi, \Phi^\dagger, V, \tau, \tau^*, \mathcal{D}\cdots)\Big]_D + 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\tau_\lambda}{8\pi i}\sum_{A\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta}W_{A\alpha L}W_{A\beta L}\right]_\mathcal{F}$$
$$+2\,\mathrm{Re}\,[f(\Phi)]_\mathcal{F} + \exp\left(\frac{2i\pi\tau_\lambda}{C_1 - C_2}\right)[v_\lambda(\Phi)]_\mathcal{F} \tag{29.3.15}$$

の形になる．ここで，

$$\tau_\lambda = \frac{4\pi i}{g_\lambda^2} + \frac{\theta}{2\pi} \tag{29.3.16}$$

だ．τ と τ_λ の差は $\ln\lambda$ の定数倍であり，v_λ の定義に吸収することができる λ の冪を一つ生成するのみだ．そこで，(29.3.15)の最終項にある指数部内の τ を τ_λ で置き換えることができた．

こうして非摂動論的効果は，(29.3.15)の最終項のみに含まれるように分離された．$C_1 - C_2 = 1/\nu$ のとき，この最終項は巻き付き数 $\nu > 0$ のインスタントンによって生成される．(一般に $C_1 - C_2$ は有理数だ．量子色力学の一般化された超対称版では $C_1 - C_2 = N_c - N_f$ は整数であり，条件 $C_1 - C_2 = 1/\nu$ から $N_c = N_f - 1$ が要請され，$\nu = 1$ のインスタントンのみが寄与する．この模型の詳細な計算[5]からインスタントンは実際そういった寄与をすることが分かる.) 非摂動論的な寄与 $v_\lambda(\Phi)$ を生成するのがインスタントンであるか否かにかかわらず，理論におけるアノマリーを持たない対称性を考えることにより，その形を決定できる．この関数は Y に依らないので，これは $Y = 0$ として評価でき，(29.3.1)における最初の項のアノマリーを持たない全

ての対称性を共有している．これらの対称性はゲージ対称性自身や $\prod_d SU(n(d))$ の下での大域的対称性を含んでいる．ここで d は左カイラル超場によって与えられるゲージ群の異なる既約表現を区別する添字であり，$n(d)$ は表現 d が現れる回数だ．(例えば，一般化された超対称性量子色力学の場合，d は $SU(N_c)$ の表現 N_c と $\bar{N}_c$ で区別される二つの値を取り，$n(N_c) = n(\bar{N}_c) = N_f$ だ.) 複数ある Φ を $\Phi^{(d)}_{ai}$ と書いて区別しよう．ここで a はゲージの添字で，i は「フレーバー」を現す添字であり，ゲージ群の下で表現 d に従って変換する $n(d)$ 個の Φ を区別している．大域的対称群 $\prod_d SU(n(d))$ の下で不変な Φ の関数を構成する唯一の方法は，Φ の積として構成する方法であり，各 d について，$n(d)$ 個のフレーバーの添字と反対称テンソル $\epsilon_{i_1\dots i_{n(d)}}$ との縮約をとり，ゲージの添字についてはゲージ群の定数テンソルと縮約をとる方法だ．(例えば，一般化された超対称性量子色力学では，v_λ は単一の不変量

$$D \equiv \mathrm{Det}_{ij} \sum_a Q_{ai} \overline{Q}_{aj}$$

の関数でなければならず，$N_c \geq N_f$ の場合にだけゼロではない.)

アノマリーを持たない $SU(n(d))$ フレーバー対称性に加えて，Φ によって与えられる各既約表現 d についての $U_d(1)$ 対称性も存在する．ここで d を一つ決めたときに，全ての $\Phi^{(d)}_{ai}$ は変換

$$\Phi^{(d)}_{ai} \to e^{i\varphi_d} \Phi^{(d)}_{ai} \tag{29.3.17}$$

を受ける．この対称性はアノマリーを持ち，このアノマリーの効果はあたかもラグランジアンが，

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - \sum_d \frac{n(d) C_{2d}}{32\pi^2} \sum_A \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f^{\mu\nu}_A f^{\rho\sigma}_A \varphi_d \tag{29.3.18}$$

と変化を受けるのと同じだ．ここで C_{2d} はゲージ群の既約表現 d に属する任意の 1 個の左カイラル・スカラー超場から C_2 への寄与だ．T

に変換性

$$T \to T + n(d)C_{2d}\varphi_d/\pi \tag{29.3.19}$$

を与えると, この対称性は回復する. (29.3.9) において $v_\lambda(\Phi)$ は因子

$$\exp\left(\frac{2i\pi T}{C_1 - C_2}\right)$$

を伴って現れ, これは変換

$$\exp\left(\frac{2i\pi T}{C_1 - C_2}\right) \to \prod_d \exp\left(\frac{+2in(d)C_{2d}\varphi_d}{C_1 - C_2}\right) \exp\left(\frac{2i\pi T}{C_1 - C_2}\right) \tag{29.3.20}$$

を受けるので, 左カイラル・スカラーによって与えられるゲージ群の各表現 d について, $v_\lambda(\Phi)$ は $\Phi_{ai}^{(d)}$ の負の次数 $-2n(d)C_{2d}/(C_1 - C_2)$ を持つ斉次関数でなければならない. (例えば, 一般化された超対称性量子色力学では $SU(N_c)$ の基本表現と反基本表現に対応する二つの既約表現があり, それぞれについて $n(d) = N_f$ かつ $C_{2d} = 1/2$ だ. そこで基本表現に属する Q の場合, v_λ は次数 $-N_f/(N_c - N_f)$ の斉次関数であり, $\bar{Q}$ が反基本表現に属する時は, 同じ次数の斉次関数となる. こうして, v_λ は $D^{-1/(N_c - N_f)}$ に比例しなければならない. ここで, D は以前に導入した行列式だ.) 一般に $C_2 = \sum_d n(d)C_{2d}$ なので, $v_\lambda(\Phi)$ は全ての Φ に関して斉次となる次数 $-2C_2/(C_1 - C_2)$ の関数だ.

この結果は重要な整合性条件を満たす. 27.4 節から, 任意の超ポテンシャルは ($\hbar = c = 1$ととり, 質量についての次数を勘定することにより) 次元 +3 を持つことを思いだそう. 一方, スカラー超場 Φ は通常のスカラー場のように次元 +1 を持つ. したがって, v_λ の内で Φ 依存性を持つ部分は次元

$$3 + \frac{2C_2}{C_1 - C_2} = \frac{3C_1 - C_2}{C_1 - C_2}$$

を持つ係数を伴って現れなければならない. この係数は, ゲージ結合定数や超ポテンシャル内にあるその他の結合定数や質量に依存せず,

(29.3.11) の第2項における裸の結合定数 g を g_λ で置き換えたので，この係数は g を定義するのに使った紫外切断 K に依存することもできない．そこで，これは λ のみに依存する．したがって，

$$v_\lambda(\Phi) = \lambda^{(3C_1-C_2)/(C_1-C_2)} H(\Phi) \tag{29.3.21}$$

となる．ここで, $H(\Phi)$ は, ゲージ群のそれぞれの表現 d に属する Φ に関して次数 $-2n(d)C_{2d}/(C_1-C_2)$ をもつ斉次関数であり, 理論のどのパラメータにも依存しない．(29.3.14) は,

$$\tau_\lambda = i\frac{3C_1-C_2}{2\pi}\ln\left(\frac{\lambda}{\Lambda}\right) + \frac{\theta}{2\pi} \tag{29.3.22}$$

という形に書き換えることができる．ここで, Λ は変化するゲージ結合定数を特徴づけるエネルギーのパラメータであり，量子色力学の場合の $\Lambda \approx 200$ MeV のようなものだ．こうして, (29.3.15) の最後の項は,

$$\exp\left(\frac{2i\pi\tau_\lambda}{C_1-C_2}\right) v_\lambda(\Phi) = \exp\left(\frac{i\theta}{C_1-C_2}\right) \Lambda^{(3C_1-C_2)/(C_1-C_2)} H(\Phi) \tag{29.3.23}$$

となる．非摂動論的な寄与 (29.3.23) を含む全有効超ポテンシャルは変動する切断 λ に依らない．

関数 $H(\Phi)$ は, Φ について負の次数を持ち斉次だから, 裸の超ポテンシャルの無い場合には, ポテンシャルはスカラー場の有限の値に対して正定値となり, 場の値が無限大のときのみゼロとなる．そのような理論では, 安定な真空状態は存在せず, 超対称性の破れの問題は議論の余地がある．適切な裸の超ポテンシャルを加えることにより真空は安定化されるかもしれない．たとえば $N_f < N_c$ の場合, 一般化された超対称性量子色力学では, 唯一のくりこみ可能な裸の超ポテンシャルは, 質量項の和

$$f(Q,\overline{Q}) = \sum_{ija} m_{ij}\overline{Q}_{ai}\,Q_{aj} \tag{29.3.24}$$

だ．超対称的な真空状態を探すためには，まず，どのスカラー成分 q_{ai} と $\overline{q}_{ai}$ が (27.4.11) を満たすかを見つける必要がある．(27.4.11) は，$SU(N_c)$ の全ての生成子 t_A に対して，

$$\sum_{abi} q^*_{ai}(t_A)_{ab}q_{bi} - \sum_{abi} \overline{q}^*_{ai}(t_A)_{ab}\overline{q}_{bi} = 0 \tag{29.3.25}$$

となる．q_{ai} と $\overline{q}_{ai}$ の双方が持つカラーの添字 a に対して，同時に $SU(N_c)$ 変換した場合，ゲージ相互作用は不変であるが，超ポテンシャルは不変ではない．また，q_{ai} と $\overline{q}_{ai}$ のそれぞれのフレーバーの添字 i に，$SU(N_f)$ 変換と $\overline{SU(N_f)}$ 変換を独立に行っても，また，q_{ai} と $\overline{q}_{ai}$ に逆符号の位相因子をかける $U(1)$ 変換をしても，ゲージ相互作用は不変となるが，超ポテンシャルは不変ではない．これらの対称性を使うと，これらの条件についての一般解を，

$$q_{ai} = \overline{q}_{ai} = \begin{cases} u_i\delta_{ai} & a \le N_f \\ 0 & a > N_f \end{cases} \tag{29.3.26}$$

の形にとることができる．ここで u_i は共通の位相因子をもつ複素数だ．(証明はこうだ．$SU(N_c)$ 生成子 t_A は，トレースがゼロのエルミート行列全ての空間を張り，(29.3.25) は，ある定数 k についての，

$$\sum_i q^*_{ai}q_{bi} - \sum_i \overline{q}^*_{ai}\overline{q}_{bi} = k\delta_{ab} \tag{29.3.27}$$

という要請と等価だ．U と V をユニタリーでかつユニモジュラーとして，カラーとフレーバーについての変換 $q \to UqV$ によって，行列 q を対角型 (29.3.26) にでき，さらに対角要素の位相に対してユニモジュラー変換をすることにより，それらが全て同一の位相を持つようにすることができる．このとき，(29.3.27) は，

$$\sum_i \overline{q}^*_{ai}\overline{q}_{bi} = \begin{cases} \left(u_a^2 - k\right)\delta_{ab} & a \le N_f \\ -k\delta_{ab} & a > N_f \end{cases}$$

となる. $a > N_f$ についての条件から $k \le 0$ が示される. k がゼロでないとき, $\overline{q}_{ai}$ は N_f 個の成分をもつゼロでない N_c 個の直交ベクトルをなすが, $N_f < N_c$ のときは, このようなベクトルを構成することは不可能であり, $k = 0$ となる. こうして一連のユニタリーなフレーバー変換により, $\overline{q}_{ai}$ を対角型 (29.3.26) にすることができる. つまり $\overline{q}_{1i}$ をまず回転して1方向に向ける. 次に, 1方向は固定したままにし, この方向に垂直な空間内で回転を行ない, $\overline{q}_{2i}$ を2方向に持っていく. そして, こういったことを繰り返す. その後でユニモジュラーな位相変換を行ない, 全ての対角要素が同一の位相因子を持つようにする. (29.3.27) により, q_{ai} と $\overline{q}_{ai}$ の対角要素の絶対値は等しいことがわかり, q_{ai} と $\overline{q}_{ai}$ に対してアノマリーを持たない逆符号の位相変換をすることにより, それらの共通の位相が等しくなるようにできる. これが証明したかったことだ.)

(29.3.23) における関数 H は, $\mathcal{I}$ を純粋な数値定数として,

$$H(q,\overline{q}) = \mathcal{I}\left[\mathrm{Det}_{ij}\sum_a q_{ai}\overline{q}_{aj}\right]^{-1/(N_c-N_f)} = \mathcal{I}\left[\prod_i u_i\right]^{-2/(N_c-N_f)} \tag{29.3.28}$$

だ. (詳細な計算により $N_f = 2$ かつ $N_c = 3$ のとき, $\mathcal{I} = 2$ となることを示すことができる.) 項 (29.3.23) と (29.3.24) を加えることにより, 完全な有効超ポテンシャルは,

$$f_{\mathrm{total}}(q,\overline{q}) = \mathcal{K}\left[\prod_i u_i\right]^{-2/(N_c-N_f)} + \sum_i m_i u_i^2 \tag{29.3.29}$$

となる. ここで

$$\mathcal{K} \equiv \mathcal{I}\exp\left(\frac{i\theta}{N_c-N_f}\right)\Lambda^{(3N_c-N_f)/(N_c-N_f)} \tag{29.3.30}$$

だ. スカラーが (29.3.26) の形になるように $SU(N_f)\times\overline{SU(N_f)}$ 変換をしたとき, 元々の質量行列は対角型になるが, m_i はそのときの質量行

列の対角要素だ. $f_{\rm total}(q,\overline{q})$ が停留値を持つという条件 (27.4.10) は,

$$u_i^2=\frac{1}{m_i}\left(\frac{\mathcal{K}}{N_c-N_f}\right)^{1-N_f/N_c}\left(\prod_j m_j\right)^{-1/N_c} \qquad (29.3.31)$$

という解を持つ. u_i が共通の位相を持つような基底としてスカラー場をとったので, この基底で m_i もまた共通の位相を持たなければならない. しかし, u_i^2 の共通の位相は一意的ではない. つまり, (29.3.31) についての $1/N_c$ 展開により, 解は, n を 0 から N_c-1 までの値をとる整数として, 因子 $\exp(2i\pi n/N_c)$ の不定性を持つことが分かる. (u_i^2 が与えられたとき, u_i の二つの符号の選びかたによらずに物理は等価だ. なぜなら理論全体は $q_{ai}\to e^{i\pi}q_{ai}$ と $\overline{q}_{ai}\to e^{-i\pi}\bar{q}_{ai}$ によるアノマリーを持たない対称性の下で不変だからだ.) N_c 個の物理的に等価でない解が存在するという事実は, 次の章で再びウィッテン指標の議論をするときに現れる.

$C_1=C_2$

(27.9.3) で見たように, 最も簡単な $N=2$ 超対称性ヤン・ミルズ理論を $N=1$ 超場を用いて書いたとき, 随伴表現の左カイラル超場**が一つだけ含まれていて, 当然ながら $C_2=C_1$ となっているので, この場合は興味深い.

$C_2=C_1$ のとき, 関数 $\exp(2i\pi T)$ は $R=0$ を持ち, $\mathcal{L}_\lambda^\sharp$ において, この関数の現れかたは R 不変性によっては制限されない. $\mathcal{L}_\lambda^\sharp$ における F 項の一般的な形は (29.3.9) によって与えられるが, 一番最後の項は存

**C_2 はカイラル超場が属するゲージ群の表現を表しており, 27.9 節での C_2^b と同じものだ. そこでは C_2^b は複素スカラーが属する表現を表していた. しかし, これはゲージーノを含む全てのスピノル場の属する表現を表す C_2^f の半分だ.

在せず,

$$\mathcal{B}_\lambda = Y f_\lambda(\Phi, \exp(2i\pi T)) + \sum_{\alpha\beta AB} \epsilon_{\alpha\beta} W_{A\alpha L} W_{B\beta B}\, \ell_{\lambda AB}(\Phi, \exp(2i\pi T)) \tag{29.3.32}$$

という形になる. f_λ は T に依存するかも知れないので, 裸の超ポテンシャルに等しいと結論付けることはできず, 裸の超ポテンシャルにおいて線形に現れる任意の結合定数や質量に, この f_λ は線形に依存するということのみを結論することができる. 特に始めから超ポテンシャルが無いときは, 非摂動論的効果によって何も生成されない.

さらに進むためには, 全ての Φ_n に対して行うある $U(1)$ 変換の下でのアノマリーを持つカイラル対称性を用いる必要がある. 理論全体が, この対称性の下で不変となるためには, 裸の超ポテンシャル内の項で Φ_n について r 次となっている項に対して, 別々の左カイラル超場 Y_r を外場として導入する必要がある. そうすると, 理論は変換

$$\Phi_n \to e^{i\varphi}\Phi_n\ , \quad T \to T + C_2\varphi/\pi\ , \quad Y_r \to e^{-ir\varphi} Y_r \tag{29.3.33}$$

の下で不変となる. 超ポテンシャル内に Φ について r 次の項があり, この項の係数について $\mathcal{N}_r$ 次となり $\exp(2ai\pi T)$ に比例する項が $\mathcal{B}_\lambda$ の内にある. (29.3.33) の下での対称性から, $\mathcal{B}_\lambda$ におけるこの項は Φ について $\mathcal{N}_\Phi$ 次でなければならず, $\mathcal{N}_\Phi$ は,

$$\mathcal{N}_\Phi = \sum_r r\mathcal{N}_r - 2C_2 a \tag{29.3.34}$$

により与えられることが分かる.

$\mathcal{B}_\lambda$ 内にあり, W について 2 次となる項の係数 $\ell_{\lambda AB}$ は, $C_1 = C_2$ の場合, 超ポテンシャルのパラメータによらないことが (29.3.32) に示されている. したがって, この場合, (29.3.34) は,

$$\mathcal{N}_\Phi = -2C_2 a \tag{29.3.35}$$

となる．そこで Φ_r についての正冪の項は，$\ell_{\lambda AB}$ にはありえないことになり，$\ell_{\lambda AB}$ 内にある Φ_r によらない任意の項は，T に依存してはいけない．したがって，$\ell_{\lambda AB}$ 内にあるこれらの Φ によらない項は，変化する結合定数パラメータ τ_λ への単なる 1 ループの寄与だ．

有効超ポテンシャルは，超ポテンシャル内のパラメータについて線形となることが(29.3.32)により分かり，その全ての項は丁度一つについて $\mathcal{N}_r = 1$ となり，その他は全てゼロとなる．そのような項について(29.3.34)から，

$$\mathcal{N}_\Phi = r - 2C_2 a \tag{29.3.36}$$

が分かる．したがって，有効超ポテンシャル内にある Φ について $\mathcal{N}_\Phi$ 次の項は，裸の超ポテンシャル内にある Φ について $r \geq \mathcal{N}_\Phi$ 次の項のみから現れることができる．$r = \mathcal{N}_\Phi$ となる項は $a = 0$ であり，裸の超ポテンシャルと同じように樹木近似によって与えられる．他の可能な項は，$r > \mathcal{N}_\Phi$ となる非摂動論的補正のみだ．Φ についてある与えられた次数を持つそのような非摂動論的項は，裸の超ポテンシャル内にある Φ についてより高次の項のみから現れることができる．

$C_1 < C_2$

この場合，$\exp(2i\pi T)$ が持つ R の値 $2(C_1 - C_2)$ は負であり，$\exp(2i\pi T)$ の正冪は，Y と W_α が持つ正の R 値を補充することができ，したがって $\mathcal{B}_\lambda$ は，Y と W_α について，任意次数の項を含んでいてもよい．しかし，カイラル対称性条件(29.3.34)と R 不変性条件

$$2 = \mathcal{N}_W + 2\sum_r \mathcal{N}_r - 2a(C_2 - C_1) \tag{29.3.37}$$

を使って，Φ について与えられた次数 $\mathcal{N}_\Phi$ を持つ項の構造に制限を与えることができる．(29.3.34)と(29.3.37)は，$r = \mathcal{N}_\Phi$ に対して $\mathcal{N}_r = 1$ と，r の他の値に対して $\mathcal{N}_r = 0$ と，$a = \mathcal{N}_W = 0$ という自明な解を持つ．つ

まり, この解は, 輻射補正を持たない元々の裸の超ポテンシャルが$\mathcal{B}_\lambda$内に存在することを単に表しているに過ぎない. はじめから, 超ポテンシャルが無い場合は, 全てのrについて$\mathcal{N}_r = 0$となり, (29.3.35)からウィルソン流ラグランジアン内に$\mathcal{N}_W = 0$となるどのような項も許されず, 超ポテンシャルは生成され得ない. (通常, 量子色力学の超対称版では, 全ての対称性と整合性を持つ可能な項が超ポテンシャル内に存在しえないことから, この結論が導かれる. しかし, ここで見たように, この結論はもっと一般的なものだ.) くりこみ可能で漸近的自由な理論では, $\mathcal{B}_\lambda$内にあるΦ依存性を持たない項の構造については有用な極限が存在する. くりこみ可能性の条件から$r > 3$について$\mathcal{N}_r = 0$となることが分かり, (29.3.34)の2/3を(29.3.37)から差し引くことにより,

$$2 \geq \frac{2}{3}\mathcal{N}_\Phi + \mathcal{N}_W + 2a\left(C_1 - \frac{1}{3}C_2\right) \tag{29.3.38}$$

を得る. 漸近的自由性の要請から$3C_1 > C_2$となり, $\mathcal{N}_\Phi = 0$のとき(あるいは$\mathcal{N}_\Phi > 0$のとき), 右辺の各項は正となる. これにより, Wについて2次より大きい次数の項でΦ依存性を持たないものは存在せず, これらの項はまた, Tには依存せず, 変化する結合定数パラメータτ_λへの1ループの寄与を再び表していることが分かる. しかし, $C_1 < C_2$の時は, 一般に, Wについて2次以上の次数の項やΦの負冪を持つ項に関する禁止則は存在しない.

29.4 ゲージ理論における超対称性の破れ

次に物理的に非常に興味深い問題を考えよう. それは, どのようなゲージ理論の場合に超対称性が自発的に破れるのかという問題だ.

27.5節での量子電磁力学の超対称版である可換ゲージ理論からまず始めよう. この模型は$U(1)$量子数$\pm e$と超ポテンシャル$f(\Phi) = m\Phi_+\Phi_-$を持つ二つのカイラル超場からなる$U(1)$ゲージ理論だ. ラ

グランジアン密度にファイエ・イリオプロス項$\xi[V]_D$を加えると，樹木近似で超対称性が破れることを27.5節で見た．そこでウィッテン指標は$\xi \neq 0$かつeが小さい場合にゼロとなり，したがって，$\xi = 0$の場合も含むξの全ての値，eの全ての値に対してゼロとなる．$\xi = 0$の場合，超対称性は破れていないのだろうか？ 樹木近似では破れていないが，この場合，高次の補正や非摂動論的効果によって真空に有限のエネルギーが与えられるかどうかは，どうすれば分かるのだろうか？

これに答えるために，29.1節で一般的な場合について述べた方法で，$\xi = 0$の理論に対称性原理を使用してみよう．ここでの対称性は電荷共役だ．つまり，全ラグランジアン密度はカイラル超場とゲージ超場の電荷共役変換

$$\mathsf{C}\Phi_{\pm}\mathsf{C}^{-1} = \Phi_{\mp}\,, \quad \mathsf{C}V\mathsf{C}^{-1} = -V \tag{29.4.1}$$

の下で不変となる．樹木近似では質量ゼロのフェルミオン，つまりフォティーノが現れるが，もし真空をCの下で偶にとると，Cの下でフォティーノの1粒子状態は奇となる．したがって，これらの状態は超対称性生成子を掛けることによっては互いに関連していない．カイラル・フェルミオンは樹木近似で質量mを持ち，これもeが小さい場合，真空と対をなさない．対を構成することができるフェルミオン的な状態がないので，少なくともeが十分小さく，摂動論がスペクトルの良い定性的な描像を与える場合は，真空状態のエネルギーは厳密にゼロでなければならない．29.1節で見たように，真空のエネルギーがゼロであることは超対称性が破れていないことを意味している．同様にフォティーノの場合，対となるボゾン的状態を持たないので，その質量は厳密にゼロでなけらばならない．

eの値がどれだけ大きいと，摂動論が全く信用できなくなるのだろうか? ここではウィッテン指標自身はゼロとなって，助けにはならない．そのかわりに重み付きウィッテン指標$\mathrm{Tr}\,\mathsf{C}(-1)^F$を考えてみよう．

eの値が小さく, $\xi = 0$の場合, 真空のエネルギーはゼロとなり, エネルギーがゼロの状態が二つあることをみた. それらは, 運動量ゼロでスピンが上か下かのフォティーノの1粒子状態と, 運動量ゼロであり反対向きのスピンを持つ二つのフォティーノを含むエネルギーがゼロのボゾン的な状態だ. 真空は$\mathrm{Tr}\,\mathsf{C}(-1)^F$に$+1$の寄与を与える. フォティーノの1粒子状態二つは$+2$の寄与を与え(C と$(-1)^F$はともに-1であるから), フォティーノの2粒子状態は$+1$の寄与を与え, 重み付きウィッテン指標は$\mathrm{Tr}\,\mathsf{C}(-1)^F = 4$ となる. これはeの値によらず, 強結合でさえも重み付きウィッテン指標は4となり, 超対称性は破れていない.

ここで複雑なことが一つある[2]. 樹木近似で運動量ゼロの状態を勘定する場合, ゲージ場$V_\mu(x)$の運動量ゼロ成分を考えていなかった. $V_0(x)$における定数項は問題ない. それはx^0に比例するゲージ・パラメータ$\Lambda(x)$を用いたゲージ変換

$$V_\mu(x) \to V_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \tag{29.4.2}$$

によって取り除けるからだ. 一方で, $V_i(x)$における定数項は単純には取り除くことはできない. これを行なうためには, x^iに比例する$\Lambda(x)$を使ってゲージ変換をしなければならず, 箱によって決まっていた距離$L \equiv V^{1/3}$だけ並進をした場合, 場の仮定した周期性と矛盾するからだ. ここで考えている特定の模型では, 全ての場は電荷$\pm e$かゼロを持つので,

$$\Lambda(x) = \frac{2\pi}{eL} \sum_i \ell_i\, x^i \tag{29.4.3}$$

という格子上にあるゲージ変換に制限すれば, この周期性は保存される. ここでℓ_iは3つの正あるいは負の整数だ. そこで, ゲージ変換によって$V_i(x)$から運動量ゼロの成分を取り除くことはできないけれど, それらの成分を$2\pi\ell_i/eL$だけ自由にずらすことはできる. $V_0 = 0$ゲー

ジをとった時のV_μのx^iによらない部分についての樹木近似のラグランジアン(ラグランジアン密度ではない)は単に$-\frac{1}{2}L^3\sum_i(\partial_0 V_i)^2$だ．したがって，ハミルトニアンは$+\frac{1}{2}L^{-3}\sum_i(\pi_i)^2$となる．ここで$\pi_i$は$V_i$の正準共役$\pi_i = L^3\partial_0 V_i$だ．この場についての波動関数$\Psi(\mathbf{V})$は，ちょうど3次元における質量1の自由粒子が，一辺の長さ$2\pi/eL$の箱に入っていて，周期的境界条件に従う場合のものだ．定まったエネルギーを持つ波動関数は$\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{V})$に比例しており，エネルギーは$\mathbf{k}^2/2L^3$で，$k_i = eL\ell_i$だ．ここで$\ell_i$は整数だ．この場についてのエネルギーがゼロの状態はただ一つあり，$k_i = 0$を持ち，規格化された波動関数は定数$(eL/2\pi)^{3/2}$に等しい．この状態はただ一つなので，エネルギーがゼロの状態の勘定はゲージの自由度によって影響を受けず，重み付きウィッテン指標は実際4だ．

カイラル超場を持たず，非可換ゲージ超場をただ一つ持つ理論を考えよう．ウィッテンによる1982年のウィッテン指標についての論文[2]では，そのような理論の場合，この指標は$r+1$になる(あるいは$-r-1$の可能性もある)という議論がされている．ここでrはゲージ群の階数であり，可換な生成子の個数の最大数だ．1997年に彼はこの計算に対する補正[6]を発見し，古典的なユニタリー群，直交群，シンプレクティック群では指標はカシミア不変量C_1になるという結果を得た．C_1はユニタリー群，シンプレクティック群の場合，実際に$r+1$に等しいが，$N>7$のときの直交群$O(N)$の場合や例外群のときには違った値をとる．一般に，このカシミア不変量は(17.5.33)によって，gを結合定数として，

$$\sum_{CD} C_{ACD}C_{BCD} = g^2 C_1 \delta_{AB} \tag{29.4.4}$$

と定義される．生成子t_A, t_B, t_Cを「標準的な」$SU(2)$部分代数の3つの生成子に制限したとき，構造定数が単に$g\epsilon_{ABC}$となるように指定することにより，曖昧さ無しにgを定義することができる．「標準的

な」$SU(2)$ 部分代数というのは23.5節でインスタントン効果の計算に使われたものだ. 古典的な群については,

$$C_1 = \begin{cases} N & SU(N) \\ N-2 & SO(N) \quad \text{for } N > 3 \\ nN+1 & USp(2N) \end{cases} \tag{29.4.5}$$

となる. $SU(N)$ の場合, 階数は $r = N-1$ であり, $USp(2N)$ の場合, 階数は $r = N$ だ. そこで双方とも $r+1 = C_1$ が成り立つ. しかし, $SO(N)$ で $N > 6$ の場合, N を奇数とすると階数は $r = (N-1)/2 = (C_1+1)/2$ となり, N が偶数のとき, $r = N/2 = (C_1+2)/2$ となる. そして指標は $r+1$ ではなく C_1 だ. もちろん, ウィッテン指標はゼロでないので超対称性は自発的には破れていないという主要な結論には, これは影響を与えない. カッツとスミルガは例外群の場合にも指標は C_1 に等しいことを示した[7]. ここではカイラル超場を持たない $SU(N)$ と $USp(2N)$ 超対称性ゲージ理論のみについて, ウィッテン指標を計算する. 計算の過程で, 直交群と例外群の場合には, なぜ特別の困難があるのかが分かるであろう.

この計算をするための一般的な戦略は以前に考えた可換型理論の場合と同じだ. まず, エネルギーがゼロの状態を調べ, 超対称性生成子の作用によって対を構成できないものがないかを調べる. もしそのような状態があれば, 樹木近似がスペクトルの良い定性的な描像を与えるくらい十分に結合定数が弱い限り, これらの対を成さない状態は実際, 精密にエネルギーがゼロだ. このとき, ゼロではないある重み付きウィッテン指標を見つけることができ, それは強結合の場合でさえも定数となり, 超対称性は結合定数がどのように強くても破れていないことを結論できる.

ここでは, もうひとつ別の複雑な事がある. それは以前の電荷を持ったカイラル超場を持つ可換型理論の例ではなかったものだ. 通常の構成のように, カイラル超場を持たないゲージ・ボゾンとゲージーノの

一般的なくりこみ可能な理論は, 次元のないパラメータを一つも持たない. そこで結合を弱くするように調整する為に使える結合定数パラメータがない. その代わりに, エネルギーと特徴的なエネルギーの大きさΛとの比に依存して変化する結合定数が一つある. このΛは18.7節で議論した量子色力学の代表的な大きさ$\Lambda \approx 200$ MeVに相当する. 非可換型理論では, 高エネルギーでゲージ結合定数がどれだけ小さくても, Λ以下のエネルギーではゲージ結合定数は強くなる. ここでは体積L^3の箱の内で考えており, これがエネルギー$\approx 1/L$での赤外切断を与える. ゲージ対称性が破れていない理論は, 通常この切断をもっていない. 弱結合ゲージ理論の話をする場合は, 大きさ$1/L$程度以下のエネルギーでも結合定数が小さい理論を考えていると理解すべきだ. このとき, 無限体積の現実的な極限の場合について, なんらかの結論を引き出すためには, 弱結合のみでなく強結合の場合にも超対称性が破れていることを議論できることが本質的だ.

$V_A^0 = 0$の時間的ゲージで考える. このとき, ラグランジアン密度(27.3.1)は,

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4} \sum_{Aij} f_{Aij}^2 - \tfrac{1}{2} \sum_A (\partial_0 V_{Ai})^2 - \tfrac{1}{2} \sum_A \left(\bar{\lambda}_A \, (\not{D}\lambda)_A\right) + \tfrac{1}{2} \sum_A D_A^2 \tag{29.4.6}$$

であり, 時間的ゲージでは,

$$f_{Aij} = \partial_i V_{Aj} - \partial_j V_{Ai} + \sum_{BC} C_{ABC} V_{Bi} V_{Cj} \;, \tag{29.4.7}$$

$$(D_i\lambda)_A = \partial_i \lambda_A + \sum_{BC} C_{ABC} V_{Bi} \lambda_C \;, \tag{29.4.8}$$

$$(D_0\lambda)_A = \partial_0 \lambda_A \tag{29.4.9}$$

となる. (通常のように, 一つあるいは複数のゲージ結合定数は, 構造定数C_{ABC}に因子として含まれている.) カイラル超場のないとき, 補

助場D_Aへの他の依存性はない．補助場は2次で現れるので，ラグラ ンジアンが停留する値$D_A=0$に等しいとおいても良くて，以後は無視することにする．$\mathbf{x}$に依存するモードのみを残すと，有効ラグランジアンは，

$$\int d^3x\,\mathcal{L}=L^3\Bigg[-\frac{1}{4}\sum_{Aij}\Big(\sum_{BC}C_{ABC}V_{Bi}V_{Cj}\Big)^2-\frac{1}{2}\sum_{Ai}(\partial_0 V_{Ai})^2$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{ABCi}C_{ABC}\Big(\bar{\lambda}_A\,\gamma_i V_{Bi}\lambda_C\Big)-\tfrac{1}{2}\sum_{A}\bar{\lambda}_A\gamma^0\partial_0\lambda_A\Bigg] \tag{29.4.10}$$

となる．このとき，ハミルトニアンは，

$$H=\frac{1}{2L^3}\sum_{Ai}\pi_{Ai}^2+\frac{L^3}{4}\sum_{Aij}\Big(\sum_{BC}C_{ABC}V_{Bi}V_{Cj}\Big)^2$$
$$+\frac{L^3}{2}\sum_{ABCi}C_{ABC}\Big(\bar{\lambda}_A\,\gamma_i V_{Bi}\lambda_C\Big) \tag{29.4.11}$$

と書ける．ここで$\pi_{Ai}=L^3\partial_0 V_{Ai}$は，$V_{Ai}$の正準共役だ．

樹木近似でエネルギーがゼロとなるゲージ場の配位は，全てのA，i，jについて$\sum_{BC}C_{ABC}V_{Bi}V_{Cj}=0$となるものだ．全ての$i$について$V_{Bi}$がゼロとなる場合，この条件は常に満たされる．ただし，t_Bがゲージ・リー代数のカルタン部分代数*に属する場合は除く．ユニタリー群やシンプレクティック群やそれらの直積の場合，エネルギーがゼロとなるゲージ場の配位が実現するのは，全てのiについてV_{Bi}がゼロとなる場合のみだ．$N\leq 6$となる直交ゲージ代数$O(N)$の場合も同様であり，それらは全てシンプレクティック・リー代数やユニタリー・リー

* **カルタン部分代数**は，rに依存せず互いに可換な生成子t_Aによって張られる部分代数だ．つまり，t_Aとt_Bがカルタン部分代数にあるときは，全てのt_Aに対してC_{AAB}はゼロとなる．ここでrは階数，つまり，そのような生成子の個数の最大数だ．例えば，19.7節で議論した強い相互作用の$SU(3)$対称性の場合，階数は$r=2$となり，カルタン部分代数はアイソスピンt_3の第三成分とハイパー電荷t_8からできており，これらのカルタン部分代数は，軽いクォークに(19.7.2)での互いに可換な行列λ_3，λ_8として作用する．

代数に等価だ. (15章の補遺を見よ.) しかし, $N \geq 7$となる直交ゲージ代数$O(N)$の場合は, そのような等価性が無く, このためにウィッテンの元々の計算は修正が必要とされる.

この計算の残りの部分では, シンプレクティック代数やユニタリー代数のようなゲージ代数のみを考える. その場合, 樹木近似でエネルギーがゼロとなる条件から, t_Bがゲージ・リー代数のカルタン部分代数にある場合を除き, 全てのiについてV_{Bi}がゼロとなることが要求される. $t_{\mathcal{A}}$がカルタン部分代数にある場合の$V_{\mathcal{A}i}$を除いて, 全て$V_{\mathcal{A}i} = 0$となっている場合には, エネルギーがゼロとなるフェルミオン場のモードは, $t_{\mathcal{A}}$がカルタン部分代数にある場合の$\lambda_{\mathcal{A}}$を除いては, $\lambda_{\mathcal{A}} = 0$を満たすものだ.

さて, これらの状態を勘定しなけらばならない. 半単純リー代数の任意の表現にある$t_{\mathcal{A}}$の固有値は量子化されており, ゼロでないゲージ場$V_{\mathcal{A}i}$の全ての値は, 周期的境界条件を持つ有限の箱内で考えた値に, ゲージ変換を通じて等価となる. これらのモードの量子化はちょうど, 上で考えた$U(1)$模型でのゲージ場について実行したものと似ており, エネルギーがゼロとなるこれらの場の状態は再び唯一つとなり, 箱内では定数の波動関数を持つ.

樹木近似でエネルギーがゼロとなる状態の多重度は, 全てフェルミオンの自由度から来る. カルタン部分代数の各生成子について, 4成分マヨラナ場$\lambda_{\mathcal{A}\alpha}$の代わりに2成分表示を使う方が便利だ. つまり, $a = \pm 1/2$の二つの左巻きの場$\lambda_{\mathcal{A}La}$と, それらのエルミート共役な右巻きの場$\lambda^*_{\mathcal{A}La}$だ. これらのゲージーノ場は, 正準反交換関係

$$\left\{\lambda_{\mathcal{A}La}\,,\,\lambda^*_{\mathcal{B}Lb}\right\} = \delta_{\mathcal{A}\mathcal{B}}\delta_{ab}$$

と,

$$\left\{\lambda_{\mathcal{A}La}\,,\,\lambda_{\mathcal{B}Lb}\right\} = \left\{\lambda^*_{\mathcal{A}La}\,,\,\lambda^*_{\mathcal{B}Lb}\right\} = 0$$

を満たす. 必要な数の因子$\lambda_{\mathcal{A}La}$を任意の状態ベクトルに作用させる

ことにより, 全ての$\lambda_{\mathcal{A}La}$で消される状態ベクトル$|0\rangle$を構成することができる. このとき, エネルギーがゼロとなる一般の状態ベクトルは, $\lambda^*_{\mathcal{A}La}$の積を$|0\rangle$に作用させたものの線形結合となる.

これらの状態のどれが, 超対称性生成子の作用によって, 対に組まれるかを調べるためには, 理論の対称性を考慮しなければならない. エネルギーがゼロとなる条件, つまりカルタン部分代数に対応する方向にのみ, ゲージ場とゲージーノの配位があるという条件は, このカルタン部分代数を不変に保つ部分群に対して不変だ. つまり, $h^{-1}t_{\mathcal{A}}h$が$t_{\mathcal{B}}$の線形結合となるような要素hを考えたとき, この要素hを元とする元々のゲージ群の部分群に対して不変だ. これらは**ワイル群**として知られている有限群を成す. 例えば, $SU(N)$の基本表現では, ワイル群はN個の座標軸の置換と, 変換をユニモジュラーにするために必要な1個の位相を掛けるという操作からできている. これらは$i \neq j$となる有限ゲージ変換$W(i,j) = \exp(i\pi\sigma(ij)/2) = i\sigma(ij)$の積として表現できる. この変換は$i$番目と$j$番目の座標軸を入れ換えるものであり, $\sigma(ij)$は$[\sigma(ij)]^i{}_j = [\sigma(ij)]^j{}_i = 1$で他の全ての要素はゼロとなっている$U(N)$生成子だ. これらの変換は, トレースがゼロとなる対角型のエルミート行列$t_{\mathcal{A}}$によって張られる空間での直交変換を誘起する. この行列は随伴表現のカルタン部分代数を生成する. 例えば, $SU(2)$群の場合は, カルタン部分代数をちょうどt_3からなるようにとることができ, ワイル群は, 単位元と自明でない1個のゲージ変換$W(1,2) = i\sigma(1,2) = i\sigma_1$からできている. このとき, $W^{-1}t_3W = -t_3$が成り立つ. $SU(3)$の場合, カルタン部分代数は二つの生成子λ_3とλ_8からなり, ワイル群は6個のゲージ変換1, $W(1,2)$, $W(2,3)$, $W(1,3)$, $W(1,2)W(2,3)$, $W(2,3)W(1,2)$ からできている. これはt_3とt_8で張られる空間内での60°回転を生成する.

ワイル群の下で真空が不変であると仮定すると, 真空はワイル群の

下で不変な状態**とのみ超対称性生成子の作用により対をなすことができる．これは以前に構成したエネルギーがゼロの状態$|0\rangle$を含んでいてもよいし，そうでなくてもよい．全ての$\lambda_{\mathcal{A}La}$で状態$|0\rangle$が消される条件は，明らかにワイル群の下で不変であり，この状態が一つしかない場合は，この状態はワイル群の 1 次元表現をなしていなければならない．ワイル群はカルタン部分代数の生成子に対して常に直交変換として作用しており，そのような表現は二つ存在する．それらは，各ワイル変換が 1 と表される不変表現と，カルタン部分代数の生成子への作用をあらわす行列式によって各ワイル変換が表される擬不変表現だ．

$|0\rangle$がワイル群の下で不変な場合をまず考えよう．明らかに，フェルミオンの 1 粒子状態$\lambda^*_{\mathcal{A}La}|0\rangle$の線形結合はどれもワイル群の下で不変にはなり得ない．フェルミオンの 2 粒子状態の線形結合でワイル不変なものはちょうど一つ存在する．それは$U|0\rangle$の形をしており，

$$U \equiv \sum_{ab\mathcal{A}} e_{ab}\,\lambda^*_{\mathcal{A}La}\,\lambda^*_{\mathcal{A}Lb} \tag{29.4.12}$$

だ．(スピンの添字aとbは，(25.2.9) で定義される反対称テンソルe_{ab}と縮約される．反交換関係は，積$\lambda^*_{\mathcal{A}La\,a}\lambda^*_{\mathcal{A}Lb}$を$a$と$b$について反対称にする.) カルタン部分代数の三つ以上の生成子の積からなるワイル不変な線形結合には様々なものが存在する．しかし，$\lambda^*_{\mathcal{A}La}$の反可換性により$U$の冪以外の全てはゼロとなる†．また，$r+1$個以上の$U$の積では，$\lambda^*_{\mathcal{A}La}$のいくつかは 2 度現れるので，$U^{r+1}=0$となる．したがっ

**物理的状態は必然的にワイル不変だとウィッテンは述べたが，ここでは，それを持ち出す必要はないだろう．真空や超対称性生成子のワイル不変性から，ワイル不変な状態のみが超対称性の自発的破れに関係していることが分かるからだ．

†これを$SU(N)$の場合に見るためには，このカルタン部分代数の各生成子$t_{\mathcal{A}}$が$U(N)$のカルタン部分代数の生成子T_iの線形結合$t_{\mathcal{A}}=\sum_i c_{\mathcal{A}i}T_i$で書けることに注意しよう．各$T_i$のゼロでない唯一の要素は$(T_i)^i{}_i=1$だ．(ここで添字は和を取らない.) $t_{\mathcal{A}}$のトレースがゼロであるためには$\sum_i c_{\mathcal{A}i}=0$でなければならない．場$\lambda^*_{\mathcal{A}La}$はワイル群の下で$t_{\mathcal{A}}$のように変換するので，ある関数$\sum_{\mathcal{AB}\cdots} d_{\mathcal{AB}\cdots}\lambda^*_{\mathcal{A}La}\lambda^*_{\mathcal{B}Lb}\cdots$

て, ワイル不変な状態は$r+1$個の状態

$$|0\rangle\,,\ U|0\rangle\,, U^2|0\rangle\,,\ \ldots\ , U^r|0\rangle \tag{29.4.13}$$

に限られることが結論付けられる. これらは全てボゾン的な状態であり, 樹木近似でこれらと対をなすエネルギーがゼロのフェルミオン的状態は無い. そこで結合定数が十分に小さければ, これらの状態のエネルギーは精密にゼロとなり, 超対称性は破れていない. また, ここでのワイル不変なウィッテン指標は$r+1$となり, 結合定数の強さによらない. ゲージ結合定数の強さがどれだけであろうと超対称性は自発的には破れない.

状態$|0\rangle$が擬不変の場合, 唯一のワイル不変な状態は,

$$\sum_{\mathcal{A},\mathcal{B},\cdots} \epsilon_{\mathcal{A},\mathcal{B},\ldots}\lambda^*_{\mathcal{A}\,L\,a}\,\lambda^*_{\mathcal{B}\,L\,b}\cdots|0\rangle \tag{29.4.14}$$

の形だ. ここで, $\epsilon_{\mathcal{A},\mathcal{B},\ldots}$ は階数rの完全反対称テンソルだ. これは$a, b, \ldots$に関して完全対称であり, 各状態は, これらの$-1/2$ではなく

がワイル不変であるためには, 係数$d_{\mathcal{A}\mathcal{B}\cdots}$は,

$$d_{\mathcal{A}\mathcal{B}\cdots} = \sum_{ij\cdots} c_{\mathcal{A}i}\, c_{\mathcal{B}j}\cdots D_{ij\cdots}$$

の形でなければならないことが分かる. ここで, $D_{ij\cdots}$は不変テンソルであり, 任意のベクトルu_i ,v_jなどについて, 関数$D(u,v,\ldots) \equiv \sum_{ij\cdots} D_{ij\cdots}\,u_i\,v_j\ldots$は座標軸の置換の下で不変となる. そのような関数で最も一般的なものは, 関数

$$S(x,\,y,\,z,\,\ldots) = \sum_i x_i y_i z_i\cdots$$

の積の線形結合だ. 引数$x,\,y,\,z,\,\ldots$は$u,\ v$などの様々な部分集合をとる. しかし, $\sum_i c_{\mathcal{A}i} = 0$であり, 今の場合, 各ベクトルの成分の和はゼロとなるので$D(u) = S(u) = 0$だ. $D(u,v)$は$S(u,v)$に比例する. また, $D(u,v,w)$は$S(u,v,w)$に比例する. $D(u,v,w,x)$は$S(u,v,w,x)$, $S(u,v)S(w,x)$, $S(u,w)S(v,x)$, $S(u,x)S(v,w)$の線形結合といった具合だ. 関数$D(u,v,\ldots)$は引数について対称ではないにもかかわらず(Sの異なる積は異なる係数を持つので) 関数$S(u,v,\ldots)$ は対称だということが重要な点だ. 今の場合, ベクトルは反交換し$u(a)_i = \sum_{\mathcal{A}} \lambda^*_{\mathcal{A}\,L,a}c_{\mathcal{A}i}$ だ. このとき, 唯一のゼロでないS関数は$S(u(1/2), u(-1/2))$だ. 生成子を適切に規格化すると, これは演算子Uとなる.

$+1/2$である添字の数で特徴づけられる．この数は，0からrまでの値をとり得るので，独立な状態の数は$r+1$だ．rが偶数か奇数かに応じて，これらの状態は全てボゾン的か，全てがフェルミオン的となる．そこで，ウィッテン指標は$\pm(r+1)$となり，ふたたび超対称性は自発的には破れていない．

ここで得られたウィッテン指標の値と，ある種の大域的な対称性がどうやって破れるかの間には興味深い関係がある．超対称性ゲージ理論のラグランジアンは，大域的な$U(1)$「R対称性」変換の下で不変だ．それはゲージーノ場の左巻き部分と右巻き部分を反対の位相で，

$$\lambda_{A\,L} \to e^{i\varphi}\lambda_{A\,L}\ , \quad \lambda_{A\,R} \to e^{-i\varphi}\lambda_{A\,R} \tag{29.4.15}$$

と変化させる．ここで，φは任意の実定数位相だ．この対称性に関連したカレントJ_5^μの保存は，アノマリー

$$\partial_\mu J_5^\mu = -\frac{1}{32\pi^2}\sum_{ABCD} C_{ACD}\,C_{BCD}\,f_A^{\mu\nu}\,f_B^{\rho\sigma}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \tag{29.4.16}$$

によって破れる．ここで，いつものように$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$は$\epsilon^{0123}\equiv 1$であり完全反対称だ．(ゲージーノはゲージ群の随伴表現に属するから，ゲージ群の生成子t_Aを$(t_A)_{BC}=-iC_{ABC}$ととり，ゲージーノが反粒子を持たないので，アノマリーに因子1/2をかけることにより，(22.2.24)から上の式が得られる.) 上で指定したゲージ結合定数の定義を使うと，(23.5.20)からアノマリーにおける場の強さの積に関する積分は，

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\int d^4x\,\sum_A f_A^{\mu\nu}\,f_A^{\rho\sigma} = 64\pi^2\nu/g^2 \tag{29.4.17}$$

となる．ここで「巻き付き数」νは，ゲージ場が属する位相的な類を特徴づけている整数だ．(29.4.4), (29.4.16), (29.4.17)とを併せると，巻き付き数νのインスタントンは，$R\equiv\int d^3x\ J_5^0$の変化

$$\Delta R = \int d^4x\,\partial_\mu J_5^\mu = -2\nu C_1 \tag{29.4.18}$$

を誘起することが分かる．つまり，有効作用は項 $(\sum_{Aab}\lambda_{A\,L\,a}\lambda_{A\,L\,b}e_{ab})^{C_1}$ とその整数冪を含んでいる．これらの項は，R 対称性変換 (29.4.15) の下で不変ではなく，位相 $\exp(2i\varphi C_1)$ の整数冪で変換される．こうして，一般の $U(1)R$ 変換 (29.4.15) の下での不変性はインスタントンにより正確なものではなくなる．変換 (29.4.15) において φ を π/C_1 の整数倍とした Z_{2C_1} まで対称性は縮小される．低エネルギーでは (量子色力学のように) ゲージ結合定数が増大し，ゲージーノの双線形の真空期待値が現れることが期待される．これはゲージーノ多重項の単純な符号を変える操作によって生成される Z_2 部分群まで離散的対称群 Z_{2C_1} が自発的に破れることを意味する．このとき，任意の真空状態 $|X\rangle$ に Z_{2C_1} の要素 $\exp(in\pi R/C_1)$ を作用させることにより得られる C_1 個のエネルギーがゼロとなる状態 $|n\rangle$ が存在する．ここで，Z_2 の生成子 $\exp(i\pi R)$ の作用でのみ異なるものを，等価な状態の対として扱うので，n のとり得る値は $0,\ 1,\ \ldots, C_1-1$ のみだ．$|X\rangle$ は R が偶の値を持つ状態の線形結合のみでしかあり得ないので，R の全ての値 $\mathcal{R}=0,\,2,\,\ldots,2C_1-2$ を持つ C_1 個の状態を，

$$\sum_n \exp\left(\frac{in\pi\mathcal{R}}{C_1}\right)|n\rangle$$

により構成することができる．とくに $SU(N)$ と $USp(2N)$ の場合，これらの状態はウィッテン指標の計算のときに出会ったワイル不変な状態と同じものだ．その計算の場合，状態 $|0\rangle$ は R 不変であり，ワイル変換の下で，擬不変ではなく，不変であった．(29.4.12) で定義される演算子 U は $R=2$ を持ち，$R=2n$ である $r+1=C_1$ 個の状態 $U^n|0\rangle$ を持つ．ここで $R=2n$ はゼロから $2r=2C_1-2$ までの値をとる．もっと一般には，同一の統計性を持つエネルギーがゼロとなる C_1 個の状態が存在する．これはユニタリー群やシンプレクティック群のみならず例外群や直交群の場合にも，ウィッテン指標が $\pm C_1$ に等しくなることを説明する手助けとなる．

全ての純ゲージ超対称性理論でウィッテン指標がゼロにならないという事実から, 自発的対称性の破れの例を見つけるためには理論にカイラル超場を加えなければならないことが分かる. 理論に質量がゼロでないカイラル超場を加えることは手助けにはならない. というのは, 弱結合の場合, 質量がゼロでない場を導入することはエネルギーがゼロとなる状態の一覧表を変化させないからだ. この一例はすでに見た. 29.3節で概観したアフレック・ダイン・サイバーグの仕事では, $SU(N_c)$の基本表現にある$N_f < N_c$個の左カイラル超場Q_{ai}を持ち, 同時に複素共役表現に属する同じ数の左カイラル超場$\overline{Q}_{ai}$を持つ$SU(N_c)$ ゲージ理論で質量項$\sum_{aij} m_{ij}\overline{Q}_{ai}Q_{aj}$を持つものを考えていたが, この理論はエネルギーがゼロとなるボゾン的状態をN_c個持つが, エネルギーがゼロとなるフェルミオン的状態は一つも持たないことが示されていた. (これは質量項がゼロとなるときにウィッテン指標が変化する一つの具体例だ. 超ポテンシャル内で, この質量項は超場の最も高い次数を持つ項であり, 質量がゼロとなると, 超場の値が大きいときの超ポテンシャルの振舞が変化するからだ. 実際(29.3.31)から質量がゼロになるにつれて, エネルギー・ゼロの状態にあるスカラー場の値が無限大になることが分かる.)

一方, 左カイラル超場を持ち, その超場を質量ゼロに保ち続ける対称性を持ち, 超対称性が動力学的に破れる理論を見つけることは難しくはない. たとえば$SU(N_c)$ゲージ理論を考えて, その理論がゲージ群のN_c表現に属するN_f個の左カイラル超場Q_{ai}と$\overline{N}_c$表現に属するN_f個の左カイラル超場$\overline{Q}_{ai}$を持つが, 今度はゲージ群$SU(N_c)$の下で中性なN_f個の左カイラル超場L_iも持つとする. 大域的(あるいは弱結合で局所的な) $SU(N_f)$対称性を仮定し, それがQとLの「フレーバー」の添字iに作用しているとしよう. ただし, この対称性は$\overline{Q}$の添字には作用しておらず, Qと$\overline{Q}$を結びつける質量項は禁止される. Q_{ai}とL_iを, $SU(N_f)$のN_f表現と$\overline{N}_f$表現のそれぞれに属するとする. 一

方で$\overline{Q}$は$SU(N_f)$の1重項に属するようにとる．このとき，唯一のくりこみ可能な超ポテンシャルの形は，

$$f(Q,\overline{Q},L)=\sum_{ija}\mathcal{G}_j\overline{Q}_{aj}Q_{ai}L_i \tag{29.4.19}$$

だ．ここで，$\mathcal{G}_j$は結合定数の組だ．これは$SU(N_f)$回転をして，ただ一つの成分のみ，例えば，$j=N_f$の成分のみが消えないように選ぶこともできる．また，その消えない成分の値は，正に選ぶこともできる．(これはアフレック・ダイン・サイバーグが扱った$N_c=3$と$N_f=2$の模型の一般化[8]だ.) ゲージ中性な超場L_iは，有効超ポテンシャル内の非摂動論的項にはなんの効果も及ぼさないので，29.3節の結果を使うことができる．つまり，$N_c>N_f$の場合，ゲージ相互作用は全有効超ポテンシャル

$$f_{\text{total}}(Q,\overline{Q},L)=\sum_{ija}\mathcal{G}_j\overline{Q}_{aj}Q_{ai}L_i+\mathcal{K}\left[\text{Det}_{ij}\sum_a\overline{Q}_{aj}Q_{ai}\right]^{-1/(N_c-N_f)} \tag{29.4.20}$$

を生成する．ここで$\mathcal{K}$は定数だ．超対称性が破れないためには，カイラル超場のスカラー成分q_{aj}, $\overline{q}_{aj}$, ℓ_iが，条件$\partial f_{\text{total}}(q,\overline{q},\ell)/\partial\ell_i=0$を満たし，　全ての$i$について，

$$\sum_{ja}\mathcal{G}_j\,\overline{q}_{aj}\,q_{ai}=0 \tag{29.4.21}$$

となる必要がある．(しかしこれは十分条件ではない.) これにより，行列$\sum_a\overline{q}_{aj}q_{ai}$は固有値ゼロを持ち，行列式ゼロであることが分かる．これは超ポテンシャル(29.4.20)の特異点であり，その点では$\partial f_{\text{total}}/\partial q_{ai}$や$\partial f_{\text{total}}/\partial\overline{q}_{aj}$がゼロとなることはできない．したがって超対称性は，この模型の場合，必ず破れる．

例えば，アフレック・ダイン・サイバーグ[8]は$N_c=3$かつ$N_f=2$となる模型を考え，ポテンシャルの値が最小となるのは，超場Φ_{ai}, $\overline{\Phi}_{ai}$,

L_iのゼロでないスカラー成分q_{aj}, $\overline{q}_{aj}$, ℓ_iが値

$$\begin{aligned} q_{11} &= \overline{q}_{11} = 1.286\,(\mathcal{K}/2\mathcal{G})^{1/7}\,, \\ q_{22} &= \overline{q}_{22} = 1.249\,(\mathcal{K}/2\mathcal{G})^{1/7}\,, \\ \ell_1 &= \sqrt{q_{11}^2 - q_{22}^2} \end{aligned} \tag{29.4.22}$$

をとる場合であることを見つけた. ここで真空のエネルギー密度は,

$$\rho_{\rm VAC} = 3.593\,(16\mathcal{G}^{10}/\mathcal{K}^4)^{1/7} \tag{29.4.23}$$

だ. また, $\theta = 0$について$\mathcal{K} = 2\Lambda^7$だ.

この場合に超対称性が自発的に破れるという事実から, 漸近的自由なゲージ理論の広範な領域で強いゲージ力によって超対称性が破れると考えてもよいであろう. そこで28.3節の超対称性の破れについての考察が正当化される.

29.5 サイバーグ・ウィッテン解*

超対称性理論の場合, スカラー場の値がある連続な範囲を動くときに, 樹木近似のポテンシャルが, 値ゼロをとることがしばしば起こる. (一例としては(29.1.9)を見よ.) この場合, 理論は樹木近似で質量がゼロとなるいくつかのスカラーの励起を持つ. 超対称性が破れていないので, これらの励起は適切なフェルミオン的な超対称パートナーを伴わなければならない. 低エネルギーでは, 理論は一連の超対称性有効ラグランジアンで記述され, 理論は1個以上の**モジュライ**, つまり元の理論におけるスカラー場の期待値によりパラメータ付けされる. 元の理論の量子効果により有効ラグランジアンのモジュライ依存性が変更されることがあり得るし, モジュライ空間のトポロジーさえも変更される場合がある[9].

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

超対称性理論の1990年代における最も著しい成果の一つとして，サイバーグとウィッテン[10]は，$N=2$超対称性を持つゲージ理論での低エネルギー有効ラグランジアンのモジュライ依存性の厳密な形を計算することができた．最も単純で特別な場合である，$N=2$超対称性を持ち，余分な物質場であるハイパー多重項を持たない$SU(2)$ゲージ理論のみを扱うことにより，この計算の背後にあるアイデアを明白なものにすることができる．

この理論のラグランジアン密度は補助場を消去した後には，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = \frac{1}{e^2}\Bigg[&- \sum_A (D_\mu\phi)^*_A\,(D^\mu\phi)_A - \frac{1}{2}\sum_A \left(\overline{\psi_A}\,(\not{D}\psi)_A\right) \\
&-2\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\sum_{ABC}\epsilon_{ABC}\,\left(\lambda^{\mathrm{T}}_{AL}\,\epsilon\,\psi_{CL}\right)\,\phi^*_B - \frac{1}{4}\sum_A f_{A\mu\nu}f_A^{\mu\nu} \\
&-\frac{1}{2}\sum_A\left(\overline{\lambda_A}\,(\not{D}\lambda)_A\right)\Bigg] + \frac{\theta}{64\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\sum_A f_A^{\mu\nu}f_A^{\rho\sigma} - V(\phi,\phi^*)
\end{aligned}
\tag{29.5.1}
$$

で与えられることを27.9節で見た．ここで，A,B,Cは値1,2,3をとる．ここでは，全ての場に因子eを掛けることにより，eが共変微分

$$(D_\mu\psi)_A = \partial_\mu\psi_A + \sum_{BC}\epsilon_{ABC}V_{B\mu}\psi_C\ , \tag{29.5.2}$$

$$(D_\mu\lambda)_A = \partial_\mu\lambda_A + \sum_{BC}\epsilon_{ABC}V_{B\mu}\lambda_C\ , \tag{29.5.3}$$

$$(D_\mu\phi)_A = \partial_\mu\phi_A + \sum_{BC}\epsilon_{ABC}V_{B\mu}\phi_C\ , \tag{29.5.4}$$

$$f_{A\mu\nu} = \partial_\mu V_{A\nu} - \partial_\nu V_{A\mu} + \sum_{BC}\epsilon_{ABC}V_{B\mu}V_{C\nu} \tag{29.5.5}$$

とポテンシャル

$$V(\phi,\phi^*) = 2\sum_A\left[\sum_{BC}\epsilon_{ABC}\,\mathrm{Re}\,\phi_B\,\mathrm{Im}\,\phi_C\right]^2 \tag{29.5.6}$$

に現れないようにしてある．このポテンシャルはスカラー場の一連の期待値について値ゼロをとる．それらの期待値は(ゲージ変換の自由度を除き),

$$\phi_1 = \phi_2 = 0\,, \quad \phi_3 = a \tag{29.5.7}$$

という形にパラメータ付けされる．ここで a は複素パラメータであり，真空のモジュライとして知られている．この真空期待値は，ベクトル場 $V_{1\mu}$ と $V_{2\mu}$, ゲージーノ λ_1 と λ_2, カイラルフェルミオン ψ_1 と ψ_2, スカラー場 ϕ_1 と ϕ_2 に質量 $2|a|$ を与えるが, $V_{3\mu}$, λ_3, ψ_3, $\phi_3 = a$ の質量は全てゼロのままに保たれる．

質量がゼロのこれらのモードのみを考慮すると(下付きの添字3を省略して), 樹木近似により低エネルギー有効理論は，ラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{\rm eff} = \frac{1}{e^2}\left[-(\partial_\mu a)^*\,(\partial^\mu a) - \frac{1}{2}\Big(\overline{\psi}\,(\partial\!\!\!/\psi)\Big) - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\Big(\overline{\lambda}\,(\partial\!\!\!/\lambda)\Big)\right] + \frac{\theta}{64\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma} \tag{29.5.8}$$

を持つ単なる自由場の理論となる．ここで $f_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ だ．実際，ゲージ・ボゾン1個とそのゲージ中性な $N = 2$ 超対称性パートナー1個からなるくりこみ可能な理論は自由場の理論でなければならない．なぜなら $N = 2$ 超対称性から，この理論の超ポテンシャルが許されないからだ．

しかし，これで話が終わるわけではない．この理論から質量がゼロでない自由度を積分すると，量子補正は低エネルギー有効理論でのくりこみ可能ではない相互作用を生成する．19.5節では，低運動量のパイ中間子と核子を扱うときに，エネルギーの次数の勘定をした．これと同様の方法で，相互作用と，それを含むファインマン・ダイアグラムのうちで低エネルギーにおいて優勢となるものを分類することがで

きる. 低エネルギー散乱振幅を摂動的に計算するために有効ラグランジアンを使うと, L 個のループ, I_f 個のフェルミオンの外線, I_b 個のボゾン (a または V_μ) の内線, I_a 個の補助場の内線, 型 i の各頂点 V_i 個を持つ連結なダイアグラムによるエネルギーの次数 ν は,

$$\nu = 4L + \sum_i V_i d_i - 2I_b - I_f \tag{29.5.9}$$

となる. ここで d_i は型 i の相互作用における微分の数だ. (補助場の内線は, プロパゲーターが運動量に依存しないので (29.5.9) には寄与しない.) これらの量は, 位相幾何学的な関係式

$$L = I_b + I_f + I_a - \sum_i V_i + 1 \tag{29.5.10}$$

と,

$$2I_b + E_b = \sum_i V_i b_i \ , \quad 2I_f + E_f = \sum_i V_i f_i \ , \quad 2I_a + E_a = \sum_i V_i a_i \tag{29.5.11}$$

を満たす. ここで E_b, E_f, E_a は, ボゾン, フェルミオン, 補助場の外線の数であり, b_i, f_i, a_i は型 i の相互作用におけるボゾン, フェルミオン, 補助場の数だ. したがってエネルギーの次数を,

$$\nu = \sum_i V_i \left(d_i + \tfrac{1}{2}\ f_i + a_i - 2\right) + 2L - E_f - 2E_a + 2 \tag{29.5.12}$$

と書くことができる. (26.8.4) と (27.4.42) によって, $N = 1$ 左カイラル・スカラー超場とその随伴共役の関数からなる D 項と, $N = 1$ ゲージ超場 W_α の対に $N = 1$ 左カイラル・スカラー超場の任意の関数を掛けることにより得られる $\mathcal{F}$ 項は, 共に $d_i + \frac{1}{2}f_i + a_i = 2$ を満たす. 一方, 余分な W_α 因子や超微分 $\mathcal{D}_\alpha$ を加えると, $d_i + \frac{1}{2}f_i + a_i > 2$ となる. そこで今の場合, 超対称性により $d_i + \frac{1}{2}f_i + a_i$ が 2 未満の相互作用は排除される. 低エネルギー散乱振幅への最大の寄与は樹木近似 ($L = 0$)

で与えられ, $d_i + \frac{1}{2}f_i + a_i = 2$ の項のみを含む有効ラグランジアンを使って計算できる. この項は27.4節で議論した一般の形

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\Big[K(\Phi,\Phi^*)\Big]_D - \frac{1}{2}\text{Re}\left[T(\Phi)\left(W_L^{\text{T}}\epsilon W_L\right)\right]_{\mathcal{F}} \tag{29.5.13}$$

をしている. このとき, (27.4.42) からラグランジアンは, 成分場を用いて,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &\frac{\partial^2 K(a,a^*)}{\partial a\,\partial a^*}\left[-\frac{1}{2}\left(\overline{\psi}\,\partial\!\!\!/\psi\right) + |\mathcal{F}|^2 - \partial_\mu a\,\partial^\mu a^*\right] \\
&- \text{Re}\left\{\frac{\partial^3 K(a,a^*)}{\partial^2 a\,\partial a^*}\left(\overline{\psi}\psi_L\right)\mathcal{F}^*\right\} \\
&-\frac{1}{2}\text{Re}\left\{\frac{\partial^3 K(a,a^*)}{\partial^2 a\,\partial a^*}\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi\right)\partial_\mu a\right\} \\
&+\frac{1}{4}\frac{\partial^4 K(a,a^*)}{\partial^2 a\,\partial^2 a^*}\left(\overline{\psi}\psi_L\right)\left(\overline{\psi}\psi_R\right) \\
&+\frac{1}{4}\text{Re}\left\{\left(\overline{\lambda}\lambda_L\right)\left(\overline{\psi}\psi_L\right)\frac{d^2T(a)}{da^2}\right\} - \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\left(\overline{\lambda}\lambda_L\right)\mathcal{F}\frac{dT(a)}{da}\right\} \\
&+\text{Re}\left\{T(a)\left[-\frac{1}{2}\left(\overline{\lambda}\,\partial\!\!\!/(1-\gamma_5)\lambda\right) - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left. +\frac{1}{8}i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}D^2\right]\right\} \\
&+\frac{\sqrt{2}}{4}\text{Re}\left\{\frac{dT(a)}{da}\left[-\left(\overline{\lambda}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_L\right)f_{\mu\nu} + 2i\left(\overline{\lambda}\psi_L\right)D\right]\right\}
\end{aligned} \tag{29.5.14}$$

という形で与えられる.

$N=2$ 超対称性を実現するために, 離散的 R 対称性変換 (27.9.2)

$$\psi \to \lambda\,,\quad \lambda \to -\psi \tag{29.5.15}$$

の下での不変性を課したい. この変換で, a と V_μ は変化しない. $(\overline{\psi}\,\partial\!\!\!/\psi)$ と $(\overline{\lambda}\,\partial\!\!\!/\lambda)$ の係数が等しいという条件は,

$$\frac{\partial^2 K(a,a^*)}{\partial a\,\partial a^*} = \text{Re}\,T(a) \tag{29.5.16}$$

だ. 右辺はaの関数とa^*の関数の和であり, $\partial^4 K/\partial^2 a\,\partial^2 a^* = 0$だ. そこで, λには対応物がないψについての4次の項は存在しない. 部分積分すると, 項$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\{T(a)(\overline{\lambda}\ \not\partial\gamma_5\lambda)\}$は$-\frac{1}{4}\mathrm{Re}\,\{(\overline{\lambda}\gamma^\mu\gamma_5\lambda)\partial_\mu T(a)\}$で置き換えられる. $(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)$と$(\overline{\lambda}\gamma^\mu\gamma_5\lambda)$の係数が等しいという条件は,

$$\frac{1}{4}\partial_\mu T = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 K}{\partial^2 a\,\partial a^*}\partial_\mu a$$

の場合に満たされ, これはまた, (29.5.16)の自動的な帰結となる. (26.A.7)によると, $f_{\mu\nu}(\overline{\lambda}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\psi)$と$f_{\mu\nu}(\overline{\lambda}[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\gamma_5\psi)$に比例する項は, 変換(29.5.15)の下で自動的に不変だ. 同様に, $(\overline{\lambda}\lambda_L)(\overline{\psi}\psi_L)$とその随伴共役に比例する項も不変だ. 一方で, $(\overline{\lambda}\psi)D$と$(\overline{\lambda}\gamma_5\psi)D$に比例する項の不変性から,

$$D \to -D \tag{29.5.17}$$

となるように変換(29.5.15)を拡張する必要が生じる. これはまた, 項$\frac{1}{2}D^2$を不変に保つ. 最終的に(29.5.16)から$(\overline{\psi}\psi_L)\mathcal{F}^*$と$(\overline{\lambda}\lambda_L)\mathcal{F}$の係数は等しいことが分かる. そこで変換(29.5.15)はまた,

$$\mathcal{F} \to \mathcal{F}^* \tag{29.5.18}$$

となるように拡張され, 項$|\mathcal{F}|^2$を不変に保つ. (29.5.14)から得られる全作用が(29.5.15), (29.5.17), (29.5.18)を組み合わせた変換の下で不変となることは, 条件(29.5.16)により保証されていると結論できる. ラグランジアンは左カイラル・スカラー超対称多重項$(a,\,\psi,\,\mathcal{F})$とゲージ多重項$(V_\mu,\,\lambda,\,D)$の$N=1$超対称性の下で不変であるから, 左カイラル・スカラー超対称多重項$(a,\,\lambda,\,\mathcal{F}^*)$とゲージ超対称多重項$(V_\mu,\,-\psi,\,-D)$に対する第二の超対称性の下でも不変だ. そこで, (29.5.13)あるいは(29.5.14)から得られる作用が$N=2$超対称性の下で(場の方程式を課さずに)不変であることを保証するのに(29.5.16)は十分なものとなっている.

(29.5.16) の一般解は**,

$$T(a) = \frac{1}{4\pi i}\frac{dh(a)}{da}\ , \quad K(a,a^*) = \mathrm{Im}\left\{\frac{a^* h(a)}{4\pi}\right\} \tag{29.5.19}$$

という形に表せる. ここで, h は a のみの関数だ. h を用いるとラグランジアン密度 (29.5.14) は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\Bigg\{ & \left[\frac{dh}{da}\right]\Big[-\frac{1}{2}\Big(\overline{\psi}\ \partial\!\!\!/(1-\gamma_5)\psi\Big) - \frac{1}{2}\Big(\overline{\lambda}\,\partial\!\!\!/(1-\gamma_5)\lambda\Big) \\ & -\partial_\mu a\,\partial^\mu a^* + |\mathcal{F}|^2 + \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + \frac{1}{8}i\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma}\Big]\Bigg\} \\ & +\frac{1}{4\pi}\mathrm{Im}\Bigg\{\left[\frac{d^2h}{da^2}\right]\Big[-\frac{1}{2}\Big(\overline{\psi}\psi_L\Big)\mathcal{F}^* - \frac{1}{2}\Big(\overline{\lambda}\lambda_L\Big)\mathcal{F} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\Big(\overline{\lambda}\psi_L\Big)D \\ & \qquad -\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\overline{\lambda}\gamma^\mu\gamma^\nu u\psi_L\Big)f_{\mu\nu}\Big]\Bigg\} \\ & +\frac{1}{16\pi}\mathrm{Im}\left\{\frac{d^3h(a)}{da^3}\Big(\overline{\lambda}\lambda_L\Big)\Big(\overline{\psi}\psi_L\Big)\right\}\end{aligned} \tag{29.5.20}$$

となる. これは $SU(2)$ R 対称性の下で不変であり, この変換の下で $(\psi,\,\lambda)$ は 2 重項として変換し, $(\mathrm{Im}\,\mathcal{F},\ \mathrm{Re}\,\mathcal{F},\ D/\sqrt{2})$ は 3 重項として変換する. 離散的変換 (29.5.15), (29.5.17), (29.5.18) は, この $SU(2)$ 群の 2 軸の回りの π ラジアンの回転という有限要素だ.

(29.5.8) と (29.5.20) を比較すると, 樹木近似で,

$$h(a)_{\mathrm{tree}} = \left[\frac{4\pi i}{e^2} + \frac{\theta}{2\pi}\right] a \tag{29.5.21}$$

となることが分かる. サイバーグとウィッテンの業績は, $h(a)$ を厳密に計算したことだ.

**因子 $1/4\pi i$ は以下で導入する双対変換を簡単にするために入れた. サイバーグとウィッテンはプレ・ポテンシャルとして知られている関数 $\mathcal{F}(a)$ (これは補助場 $\mathcal{F}$ とは関係ない) を導入した. このとき, $h(a) = d\mathcal{F}(a)/da$ だ.

この計算の第一段階は, 物理的に等価な理論を与える a と $dh(a)/da$ についての様々な線形変換があることに気付くことだ. これは27.9節で簡単に議論した双対性の特性と関連した低エネルギー有効理論の著しい性質による. この性質を調べるために, $N=1$ 超場で表されたラグランジアン密度 (29.5.13) を見てみよう. $N=2$ 超対称性から要請される関係式 (29.5.19) を使うと,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{8\pi}\text{Im}\left[\Phi^* h(\Phi)\right]_D - \frac{1}{8\pi}\text{Im}\left[h'(\Phi)\left(W_L^{\text{T}}\epsilon W_L\right)\right]_{\mathcal{F}} \qquad (29.5.22)$$

となる. 経路積分を行う場合, スピノル場の強さの超場 W_L には, 斉次マックスウェル方程式の超対称版 (27.2.20) により拘束条件

$$\text{Re}\left(\mathcal{D}_L^{\text{T}}\epsilon W_L\right) = 0 \qquad (29.5.23)$$

が付く. これは通常 W_L が (27.2.15) の形

$$W_L = \frac{i}{4}\left(\mathcal{D}_R^{\text{T}}\epsilon\mathcal{D}_R\right)\mathcal{D}_L V \qquad (29.5.24)$$

になることを要請することにより課される. ここで V は制限されていない実超場だ. こうする代りに, 作用にラグランジアン未定乗数項

$$\Delta I_{\text{eff}} = \frac{1}{8\pi}\text{Re}\int d^4x\,\left[\tilde{V}\left(\mathcal{D}_L^{\text{T}}\epsilon W_L\right)\right]_D \qquad (29.5.25)$$

を導入することにより, 条件 (29.5.23) を実現させることもできる. ここで $\tilde{V}$ は制限されていない実超場だ. (数因子 $1/8\pi$ は $\tilde{V}$ の規格化を後で便利なように固定するためにある.) このとき, 経路積分において, $\tilde{V}$ が実超場であり, W_L が左カイラリティーの条件 $\mathcal{D}_{R\alpha}W_{L\beta}=0$ を満たす左巻きのスピノル超場であることを除き, 何の制限も無しに $\tilde{V}$ と W_L の両方を積分することができる. 超空間内で部分積分すると, 作用における新しい項を,

$$\Delta I_{\text{eff}} = -\frac{1}{8\pi}\text{Re}\int d^4x\,\left[\left((\mathcal{D}_L\tilde{V})^{\text{T}}\epsilon W_L\right)\right]_D \qquad (29.5.26)$$

と書くことができ, 更に, (26.3.31) や W_L が左カイラルであるという事実を使うと,

$$\Delta I_{\rm eff} = {\rm Re}\left[\frac{i}{4\pi}\int d^4x\,\left[\left(\tilde{W}_L^{\rm T}\epsilon W_L\right)\right]_{\mathcal{F}}\right] \tag{29.5.27}$$

と書ける. 以前に W_L を V により与えたのと同じ関係式を使って, $\tilde{W}_L$ は $\tilde{V}$ を用いて,

$$\tilde{W}_L = \frac{i}{4}\left(\mathcal{D}_R^{\rm T}\epsilon\mathcal{D}_R\right)\mathcal{D}_L\tilde{V} \tag{29.5.28}$$

と書ける. ここでは, W_L について2次の作用

$$I_{\rm eff}+\Delta I_{\rm eff} = {\rm Im}\int d^4x\,\left[-\frac{1}{8\pi}h'(\Phi)\left(W_L^{\rm T}\epsilon W_L\right)-\frac{1}{4\pi}\left(\tilde{W}_L^{\rm T}\epsilon W_L\right)\right]_{\mathcal{F}} + \frac{1}{8\pi}{\rm Im}\int d^4x\,\left[\Phi^* h(\Phi)\right]_D \tag{29.5.29}$$

を何の拘束条件も無しに W_L について積分している. W_L を作用が停留するときの値

$$W_L = -\frac{\tilde{W}_L}{h'(\Phi)} \tag{29.5.30}$$

に等しいと置くことにより, この積分は行なわれる. そして全有効作用は,

$$\tilde{I}_{\rm eff} = +\frac{1}{8\pi}{\rm Im}\int d^4x\,\left[\frac{1}{h'(\Phi)}\left(\tilde{W}_L^{\rm T}\epsilon\tilde{W}_L\right)\right]_{\mathcal{F}} + \frac{1}{8\pi}{\rm Im}\int d^4x\,\left[\Phi^* h(\Phi)\right]_D \tag{29.5.31}$$

となる. 新たな左カイラル・スカラー超場と新たな h 関数

$$\tilde{\Phi}\equiv h(\Phi)\,,\quad \tilde{h}(\tilde{\Phi})\equiv -\Phi \tag{29.5.32}$$

を定義すると,

$$\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{\Phi}}\frac{dh}{d\Phi} = -\frac{d\Phi}{d\tilde{\Phi}}\frac{d\tilde{\Phi}}{d\Phi} = -1 \tag{29.5.33}$$

となり, 作用 (29.5.31) は,

$$\tilde{I}_{\rm eff} = -\frac{1}{8\pi}{\rm Im}\int d^4x\,\left[\tilde{h}'(\tilde{\Phi})\left(\tilde{W}_L^{\rm T}\epsilon\tilde{W}_L\right)\right]_{\mathcal{F}} + \frac{1}{8\pi}{\rm Im}\int d^4x\,\left[\tilde{\Phi}^*\tilde{h}(\tilde{\Phi})\right]_D \tag{29.5.34}$$

と書ける. これを導いた方法から, この有効作用に基づいた理論は元々の場の有効理論と等価であることが分かる. そこで, スカラー場の値が a であり h 関数 $h(a)$ を持つ $N=2$ の有効場の理論は, スカラー場の値が $a_D \equiv h(a)$ であり h 関数 $\tilde{h}(a_D) \equiv -a$ を持つ場の有効理論に物理的に等価だ.[†] これが現在の内容に当てはまる双対性だ.

(Φ または W は変えずに) 等価なラグランジアンを生成する関数 $h(\Phi)$ についての別の変換が存在し, それを変換 (29.5.32) と組み合わせると, 双対変換のより大きな群を与えることができる. 実数係数を持つ線形項だけ,

$$h(\Phi) \to h(\Phi) + b\,\Phi \tag{29.5.35}$$

といった形に $h(\Phi)$ をずらしてみよう. ここで b は実定数だ. このとき, 有効ラグランジアン密度 (29.5.22) の第一項は $b\,\mathrm{Im}\,\{[\Phi^*\Phi]_D\}/8\pi$ だけ変化し, $\Phi^*\Phi$ の D 項は実なので, その変化はゼロとなる. したがって, 有効ラグランジアン密度 (29.5.22) の変化は第二項のずれ

$$\mathcal{L}_{\rm eff} \to \mathcal{L}_{\rm eff} - \frac{b}{8\pi}\mathrm{Im}\left[\left(W_L^{\rm T}\epsilon W_L\right)\right]_{\mathcal{F}} \tag{29.5.36}$$

により与えられる. あるいは (27.2.13) によって,

$$\mathcal{L}_{\rm eff} \to \mathcal{L}_{\rm eff} - \frac{b}{8\pi}\left[i\left(\bar{\lambda}\,\partial\!\!\!/\gamma_5\lambda\right) + \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}f_{\mu\nu}f_{\rho\sigma}\right] \tag{29.5.37}$$

となる. 右辺の括弧内の第一項は時空の全微分であり, 有効作用には影響を及ぼさない. 括弧内の第二項もまた, $f_{\mu\nu}$ が $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ と書けるときは, いつでも時空の全微分 $(1/2)\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\nu f_{\rho\sigma})$ として書くことができる. しかし, 23.3 節で議論したように, ϕ_A が 3 方向になるような我々が使ったゲージ変換は, どこかで特異性を持たなければならず, $f_{\mu\nu}$ を全ての場所で 1 個の A_μ のみを使って書くことはできない. 結果

[†] 下付きの添字 D は「双対」を表しており, もちろん超場の D 項とは何の関係もない.

として物理量は, 作用における,

$$-\frac{\theta}{64\pi^2}\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \tag{29.5.38}$$

といった形の項により影響を受け得る. 特に, ウィッテン[11] は, 23.3 節で扱った磁気単極子の理論において, そのような項のある場合, 最小の磁気単極子能率を持つ磁気単極子の電荷は $e\theta/2\pi$ であることを示した. しかし, 27.9 節で述べたように, この理論にはまた, e の整数倍の電荷と磁気単極子能率の双方を持つダイオンが存在し, 磁気単極子とダイオン電荷の全体は θ について周期的であり, 周期 2π を持つ. 低エネルギー有効理論の θ は, 元々の基本的な理論のラグランジアン密度 (29.5.1)((29.5.21) に注意) に現れる θ から来るので実際, 全ての物理量はこの θ について周期性を持つ. 23.5 節では全ての物理量は, この θ について周期的であることを見た. (29.5.37) に従うと, 変換 (29.5.35) により θ は $2\pi b$ だけ変化し, b を任意の正または負の整数と等しいと置くと, 変換 (29.5.35) は等価な有効作用を与える.

この種の変換は, 元となる基本的な理論の厳密な不変性と密接に関係している. ラグランジアン (29.5.1) は連続な R 変換

$$\theta_L \to \exp(i\alpha)\theta_L\ , \quad W_{AL} \to \exp(i\alpha) W_{AL}\ , \quad \Phi_A \to \exp(2i\alpha)\Phi_A \tag{29.5.39}$$

の下で不変だ. この対称性はアノマリーによって破れる. つまり, λ_{AL} と ψ_{AL} は共に R 量子数 $+1$ を持ち, λ_{AR} と ψ_{AR} はもちろん R 量子数 -1 を持つ. したがって, (23.5.21) と (23.5.23) によりフェルミオン場についての積分の測度は, 変換 (29.5.39) の下で因子 $\exp(2i\alpha N\nu)$ だけ変化する. ここで ν はベクトル場の配位の巻き付き数をあらわす整数であり, N は,

$$\mathrm{Tr}\ (t_A t_B) = \frac{1}{2} N \delta_{AB}\ .$$

により定義される. (ゲージ群の同じ表現に属する二つの場 ψ_A と λ_A があるにもかかわらず, 因子 $\exp(2i\alpha N\nu)$ は 23.5 節で与えた物と同じ

ものになる．というのは，これらはマヨラナ場であり，23.5節でのディラック場とは異なるからだ.) ここでの生成子は $(t_A)_{BC} = -i\epsilon_{ABC}$ であり，$N = 4$ であって，$\exp(8i\alpha) = 1$ のとき，測度は不変のまま保たれる．言い換えれば，連続 R 対称性はインスタントンにより $\mathbb{Z}_8$ 部分群にまで破れる．この部分群は変換

$$\psi_{AL} \to \sqrt{i}\,\psi_{AL}\;,\quad \lambda_{AL} \to \sqrt{i}\,\lambda_{AL}\;,\quad \phi_A \to i\,\phi_A \tag{29.5.40}$$

により生成される群だ．この対称性は低エネルギー有効理論にも持ち込まれる．しかし，離散的変換 (29.5.40) の下で有効ラグランジアン (29.5.20) が不変であるとは言っていない．この対称性により，全ての a について $-ih(ia) = h(a)$ であることが要請される．この条件は樹木近似 (29.5.21) により満たされるが，(あとで分かるように) 1 ループの次数でさえ破れる．h 関数 $-ih(ia)$ を持つ有効理論は h 関数 $h(a)$ を持つ有効理論と等価であるという条件から，$\mathbb{Z}_8$ R 対称性は有効理論において実現される．つまり，変換 (29.5.32) と (29.5.35) のある結合により，$-ih(ia)$ は $h(a)$ と関係していなくてはならない．ここで b は整数だ．

理論の物理的重要性は 2 種類の変換で不変に保たれることを見た．それらの変換の一つは，変換 $\Phi \to \tilde{\Phi} = h(\Phi)$ かつ $h(\Phi) \to \tilde{h}(\tilde{\Phi}) = -\Phi$ であり，これらは，

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix} \tag{29.5.41}$$

と書かれ，もう一つの変換は $h(\Phi) \to h(\Phi) + b\Phi$，$\Phi \to \Phi$ で，

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix} \tag{29.5.42}$$

と書くことができる．ここで b は任意の整数だ．これらの変換を組み合わせると，一般化された双対変換

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} n & m \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi \\ h(\Phi) \end{pmatrix} \tag{29.5.43}$$

を行なうことができる．ここで n, m, k, l は全て整数であり，(29.5.41)，(29.5.42) における行列と同様に，(29.5.43) における行列は行列式 1 を持つという条件

$$nl - mk = 1 \tag{29.5.44}$$

を満たす．したがって，これらの変換は群 $SL(2, \mathbb{Z})$ を成す．

双対変換の物理的重要性は，$N = 2$ 超対称性代数の中心電荷を考えることにより明らかとなる．25.5 節で示したように，この中心電荷の 1 粒子状態での固有値 Z_{12} は，状態の質量に下限 $M \geq |Z_{12}|/2$ を与える．それは「小さい」超対称多重項に属する粒子が到達できる限度だ．元となる基本的な $N = 2$ 超対称性を持つ $SU(2)$ ゲージ理論では，Z_{12} は (27.9.22) により与えられることを 27.9 節で見た．つまり，

$$Z_{12} = 2\sqrt{2}\,v\,[iq - \mathcal{M}]$$

だ．ここで，q と $\mathcal{M}$ は粒子の電荷と磁気能率であり，v は通常のように規格化された中性スカラー場の真空期待値だ．この節の記法では，因子 e を場 a の規格化に吸収している．したがって，ここでは，

$$Z_{12} = 2\sqrt{2}\,a\,[iq - \mathcal{M}]/e \tag{29.5.45}$$

と書ける．この理論は質量がゼロでない基本スカラー，スピノル，ベクトル・ボゾンのような粒子を含み，それらは電荷 e を持ち，磁気単極子能率はゼロだ．そこで，そのような粒子は Z_{12} の固有状態であり，固有値

$$Z_{12}^{\text{素電荷}} = 2\sqrt{2}\,i\,a \tag{29.5.46}$$

を持つ．すでに見たように，スカラー場 a と h 関数 $h(a)$ を持つ理論は，スカラー場 $n\,a + m\,h(a)$ と h 関数 $k\,a + l\,h(a)$ を持つ理論に等価だ．したがって，全ての整数 n と m について，スカラー場 a と h 関数 $h(a)$ を持つ理論は，スカラー場 $na + mh(a)$ と h 関数 $ka + lh(a)$ を持つ理論の場

合の磁気能率がゼロであり電荷eを持つ質量有限の粒子のような粒子もまた持たなければならない．したがって，その理論は中心電荷

$$Z_{12} = 2\sqrt{2}\, i\Big[n\, a + m\, h(a)\Big] \tag{29.5.47}$$

を持つ．これと(29.5.45)を比較すると，スカラー場aとh関数$h(a)$を持つ理論では，この粒子は以下の値の電荷qと磁気単極子能率$\mathcal{M}$を持つ粒子として現れることが分かる．

$$q/e = n + m\,\mathrm{Re}\left[h(a)/a\right]\,, \quad \mathcal{M}/e = m\,\mathrm{Im}\left[h(a)/a\right]\,. \tag{29.5.48}$$

これはダイオンであり，電荷と磁気単極子能率の双方を持つ．この粒子の電荷についての表式(29.5.48)は，磁気単極子の電荷についてのウィッテンの以前の結果を含んでいることに注意しよう．つまり，項$b\,a$を関数$h(a)$に付け加えると，$m = 1$の磁気単極子の電荷は$be = e\Delta\theta/2\pi$だけ変化する．

(29.5.48)における$h(a)$について，樹木近似の結果(29.5.21)を使うと，この近似では理論の磁気単極子能率は$4\pi/e$の倍数ということが示される．これは23.3節で導いた磁気単極子能率と同じだ．(そこで使われた磁気単極子能率gが$\mathcal{M}/4\pi$であることを思い出そう．) しかし，これは半古典的な結果であり，量子補正を受ける．$n = 0$かつ$m = 1$である双対変換(29.5.41)は，磁気単極子能率がゼロで電荷eを持つ基本粒子を，磁気単極子能率$\mathrm{Im}\left[h(a)/a\right]$を持つ基本粒子でないものに移す．この磁気単極子能率は樹木近似で$4\pi/e$だ．

元となる基本的な$N = 2$超対称性$SU(2)$ゲージ理論の電荷についてのベータ関数は，摂動的に1ループの結果(27.9.50)により与えられる．第1カシミア不変量を$C_1 = 2e$ととり，ハイパー多重項の数を$H = 0$と置くと，ベータ関数は，

$$\beta_{\text{摂動}}(e) = -\frac{e^3}{4\pi^2} \tag{29.5.49}$$

となる．ここで a はくりこみのスケールにとるので, 変化する電荷 $e(a)$ は,

$$a\frac{d}{da}e(a) = \beta\Big(e(a)\Big) \tag{29.5.50}$$

を満たす．摂動論の表式 (29.5.49) を使うと, Λ を積分定数として,

$$[e^{-2}(a)]_{\text{摂動}} = \frac{1}{2\pi^2}\ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right) \tag{29.5.51}$$

を得る．ここで採用した形式では, ゲージ場の定義に因子 e を吸収しており, 低エネルギー有効ラグランジアン (29.5.20) において, 量 $e^{-2}(a)$ は項 $-\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$ の係数 $h'(a)/4\pi i$ として現れる．したがって, 関数 $h(a)$ は摂動論では††,

$$[h(a)]_{\text{摂動}} = \frac{2i}{\pi}\left[a\ln\left(\frac{a}{\Lambda}\right) - a\right] = 4\pi i a\left[[e^{-2}(a)]_{\text{摂動}} - \frac{1}{2\pi^2}\right] \tag{29.5.52}$$

により与えられる．これは $|a|$ が十分に大きく, (29.5.51) より $e(a)$ が小さいときには良い近似‡となる．この場合, (29.5.48) により磁気単極子とダイオンの磁気単極子能率は,

$$\mathcal{M}_{\text{摂動}}/e = 4\pi\, m\, a\left[[e^{-2}(a)]_{\text{摂動}} - \frac{1}{2\pi^2}\right] \tag{29.5.53}$$

と与えられる．ここで m は任意の整数だ．この関係式は, 半古典的な表式 $\mathcal{M}/e = 4\pi m/e^2$ の右辺における e を, 変化する電荷 $e(a)$ に単純に置き換えたものでは<u>ない</u>ことに注意しよう．

$|a|$ の値が十分に大きいとき, (29.5.52) はまた, 必要な整合条件を満たす．つまり, 運動項 $-\frac{1}{2}(\bar{\psi}\,\partial\!\!\!/\psi)$, $-\frac{1}{2}(\bar{\lambda}\,\partial\!\!\!/\lambda)$, $-\partial_\mu a^*\partial^\mu a$, $-\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$ の係

---

†† $h'(a)$ を積分するのに必要な定数は, $[\Phi^*]_D$ が微分なので, (29.5.22) から導かれる低エネルギー有効作用に効果を及ぼさない．この定数は以前に議論した $\mathbb{Z}_8$ 対称性を使って決めることができる．(29.5.52) は $-ih(ia) = h(a) - 1$ を満たし, 理論の物理的重要性を変化させない変換 (29.5.35) の特別な場合 $b = -1$ だ．これは (29.5.52) に定数を加えると成立しなくなる．

‡ $\beta(e)$ にはインスタントンから生じる非摂動論的な寄与[12] があるが, これらは $e \to 0$ につれて急速にゼロとなる．

数 $\mathrm{Im}\, h'(a)/4\pi$ は正でなければならない．同じ条件により，(29.5.52) は a の全ての値に対して良い近似ではありえないことが分かる．なぜなら，$|a|$ が十分に小さいとき，$\mathrm{Im}\, h'(a)$ は負の値をとるからだ．

(29.5.52) から $|a|$ の値が大きく摂動論が妥当な場合，$|a|$ を半径とする円周のまわりに a を反時計回りに回転させると，$h(a)$ は $-4a$ だけ変化することが示される．これにより，a の有限の値に対して $h(a)$ は 1 個以上の特異点を持たなければならない．

$h(a)$ がちょうど 1 個の特異点を持つ可能性は容易に排除することができる．なぜなら，それがあると，a の全ての非特異な値に対して $h'(a)$ が正の虚部を持つという条件が満たされなくなるからだ．これはすでに見たように，有効ラグランジアンの運動項の係数が正定値であるために必要な条件だ．特異点が 1 個の場合，その特異点は $a = 0$ になければならない．なぜなら，$\mathbb{Z}_8$ 対称性から $h(a)$ が a で特異性を持つと ia でもまた特異であることが分かるからだ．関数 $h(a) - h_{摂動}(a)$ はこのとき，無限遠とおそらく $a = 0$ を除いて解析的であるが，この関数は $|a| \to \infty$ につれてゼロとなる．特に a が大きい場合には，a を円周の回りに回転したとき，この関数は変化しない．そこで，この関数は $1/a$ について高々多項式であり，定数項は持たないであろう．多項式が消えないときは，$a \to 0$ につれて $h'(a)$ は a のある負冪として振舞う．そこで $h'(a)$ は正の虚部を持たないだろう．一方，多項式がゼロとなるとき，$h'(a)$ は $h'_{摂動}(a)$ に等しくなり，この場合もまた $a \to 0$ に対して $h'(a)$ は正の虚部を持たない．

$h(a)$ が持つ特異性の構造を調べるときに，a と $a_D = h(a)$ を同等に扱い，それらを共にある複素変数 u の関数として表現することにより，双対性を見失わないようにすることは手助けとなる．サイバーグとウィッテンは u をゲージ不変な量 $\frac{1}{2}\sum_A \phi_A\phi_A$ の期待値にとった．これは $\mathbb{Z}_8$ 変換 $\phi_A \to \pm i\phi_A$ のもとで符号を変える．そしてもちろん，この

変換のもとで$a \equiv \phi_3 \to \pm ia$ だから,

$$a(-u) = \pm i\, a(u) \tag{29.5.54}$$

となる. a と $-a$ は有限の $SU(2)$ ゲージ変換で関連しているので, ここでの符号は物理的に重要ではない. (必要ならば, $\mathrm{Re}\, u > 0$ と $\mathrm{Re}\, u < 0$ のそれぞれについて, 上の符号か下の符号を適用するという慣例を採用することにより, この符号を固定できる.) $|a|$ が大きな値の場合は, 摂動論を信用することができ, $|u| \to \infty$ に対して,

$$a \to \sqrt{2u}\,, \quad a_D \to \frac{i}{\pi}\left[\sqrt{2u}\,\ln\left(\frac{2u}{\Lambda^2}\right) - 2\sqrt{2u}\right] \tag{29.5.55}$$

となる. $|u|$ の値を大きくとって固定し, 半径 $|u|$ の円周の回りに u を反時計回りに一周させると, 対数関数 $\ln(2u/\Lambda^2)$ は $2i\pi$ だけ変化し, $\sqrt{2u}$ は符号を変える. したがって, a と a_D の変化は**モノドロミー行列**

$$\begin{pmatrix} a \\ a_D \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a_D \end{pmatrix} \tag{29.5.56}$$

で与えられる. そこで関数 $a(u)$ と $a_D(u)$ は, u の有限な値 u_n に対して 2 個以上の特異点を持たなければならず, 各特異点の周囲を反時計回りに一周させる効果を組み合わせたものは (29.5.56) と同じ効果をもつ.

ちょうど 2 個の特異点だけがある可能性を考えてみよう. (これは参考文献10に対応するサイバーグ・ウィッテンの 2 番目の論文で扱っている場合だ.) $a_A \to ia_A$ を引き起こす $\mathbb{Z}_8$ 対称性の下で $u \to -u$ を得るので, 特異点は u の値の対 u_0 と $-u_0$ でなければならない. 非特異な基点 P から出発して, u 平面内を特異点 $\pm u_0$ の回りに反時計まわりに移動して P まで戻って来ると, 等価な理論が生成される. そこで, その変換は双対変換の形をとらなければならず, 一般に P に依存し, ベクトル (a, a_D) には (29.5.43) に示すような $SL(2,\mathbb{Z})$ **モノドロミー行列**

$M_\pm$ が作用する. u が大きい場合, 円周を反時計回りに一周する経路は, P から出発して $-u_0$ の周囲を反時計回りに移動して P まで戻り, その後 $+u_0$ の周囲を反時計回りに移動して P まで戻る経路に変形できる. (図 29.1 を見よ.) この変形は積分を変化させないので, モノドロミー行列のこの順番での(右から左に読んでの)積は, (29.5.56) の行列

$$M_+ M_- = M_\infty \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \tag{29.5.57}$$

に等しくなければならない. ある粒子が質量ゼロになる値を a と a_D がとる場合には, 特異点が現れる. 例えば, 摂動論の表式 (29.5.52) における $h(a)$ の特異性は $a = 0$ に現れる. なぜなら, この a の値に対して, 電荷を持つ基本粒子は摂動論で質量ゼロになるからだ. $a = 0$ における 1 個の特異点の可能性は既に排除したので, $\pm u_0$ における特異点は, 他の粒子の質量がゼロとなることから現れるものでなければならない.

サイバーグ・ウィッテンの計算の最も驚くべき部分は, これらの粒子が, 元となる基本的な $SU(2)$ 超対称性理論での基本的ではない磁気単極子やダイオンであることに彼らが気付いたことだ. 23.3 節で行なった類の半古典的な計算から, 安定な磁気単極子やダイオンは磁気量子数 $m = \pm 1$ と整数値である電荷量子数 n を持ち, マヨラナ・スピノルの一つの対と複素スカラーの一つの対から出来ているハイパー多重項に属することが分かった. これらは「小さい」多重項であり, 質量は BPS の値によって与えらる. その質量は (27.9.24) と (29.5.47) によると, $N \equiv \pm n$ として,

$$M = |Z_{12}|/2 = \sqrt{2}\left| Na + h(a) \right| \tag{29.5.58}$$

となる. この質量がゼロに近づくと何が起こるか計算するには, 通常の荷電粒子のハイパー多重項の質量がゼロに近づくと何が起こるの

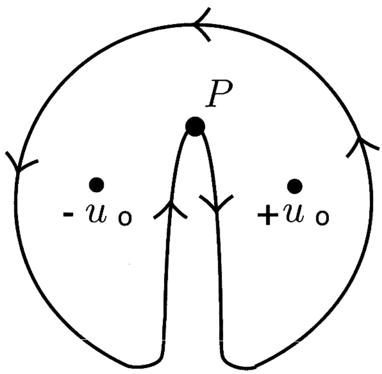


図 29.1: 経路の変形. $|u|$が大きいとき, 複素u平面内を反時計回りに一周する経路を, 基点Pから出発し, $u=-u_0$における特異点の周囲を反時計回りに移動しPに戻り, その後$u=+u_0$における特異点の周囲を反時計回りに移動しPまで戻ってくる経路に変形する.

かという良く知られた問題を考え, その後で双対性を使い, 軽い磁気単極子の場合に切替えて考えると最も簡単だ. $U(1)$ゲージ結合定数のベータ関数は, ここでは$C_1=0$, $C_2^f=C_2^s=2$ のときの (27.9.45) を使って与えられ,

$$\beta(e) = +\frac{e^3}{8\pi^2}$$

と書ける. くりこみ群方程式の解は,

$$e^{-2}(a) = -\frac{1}{4\pi^2}\ln\left(\frac{a}{\text{定数}}\right)$$

となる. (29.5.52) を導く時に見たように, これにより,

$$h'(a) = 4\pi i\, e^{-2}(a) = -\frac{i}{\pi}\ln\left(\frac{a}{\text{定数}}\right)$$

となる. これは$a\to 0$につれて, 小さい正の値$e^2(a)$を与えるが, この極限で質量がゼロとなる通常の荷電粒子のハイパー多重項を理論が実際に含んでいれば, この結果は信頼できるものとなるだろう. その

代わりに, 我々は質量がゼロとなる磁気単極子やダイオンのハイパー多重項が存在することを仮定している. つまり, この場合を扱うために, a を $Na+h(a)$ に移す双対変換 (29.5.43)

$$\begin{pmatrix} a \\ h(a) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{h}(\hat{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ h(a) \end{pmatrix} \tag{29.5.59}$$

を適用することができる. したがって, u が $\hat{a}=Na+h(a)\to 0$ となる点 u_0 に近付くと,

$$\frac{d\hat{h}(\hat{a})}{d\hat{a}} \to -\frac{i}{\pi}\ln\left(\frac{\hat{a}}{\text{定数}}\right) \tag{29.5.60}$$

が得られると結論付けられる. 言い換えると,

$$\frac{da}{d\left(h(a)+Na\right)} \to +\frac{i}{\pi}\ln\left(\frac{h(a)+Na}{\text{定数}}\right) \tag{29.5.61}$$

だ. 解は, a_0 と Λ_0 を積分定数として,

$$a(u) = a_0 + \frac{i}{\pi}\Big(h(u)+Na(u)\Big)\ln\left(\frac{h(u)+Na(u)}{\Lambda_0}\right) \tag{29.5.62}$$

だ. また, $u\to u_0$ につれて $h+Na\to 0$ となることを仮定しているので, 主要な項を,

$$h(u)+Na(u) \to c_0(u-u_0) \tag{29.5.63}$$

と書くことができる. そこで (29.5.62) は主要な項

$$a(u) \to a_0 + \frac{i\,c_0}{\pi}(u-u_0)\ln\left(\frac{c_0(u-u_0)}{\Lambda_0}\right) \tag{29.5.64}$$

を持つ.

u_0 を囲む円周のまわりに u を反時計回りに一周させると, $h(a)+Na$ は変化を受けないが, a は $-2(h(a)+Na)$ だけ変化する. したがって, この特異点についてのモノドロミー行列は,

$$M_+ = \begin{pmatrix} 1-2N & -2 \\ 2N^2 & 1+2N \end{pmatrix} \tag{29.5.65}$$

となる.

同様に, $-u_0$ における特異点が, 磁気量子数 $\pm'1$ (プライム ($'$) は u_0 の場合の符号と区別するためだ.) と電荷量子数 n' を持つ磁気単極子やダイオンのゼロとなる質量と関係しているときは, この特異点では $h(u) + N'a(u) \to 0$ かつ,

$$a \to a_0' + \frac{i}{\pi}\Big(h(u) + N'a(u)\Big) \ln\left(\frac{h(u) + N'a(u)}{\Lambda_0'}\right) \tag{29.5.66}$$

となる. ここで $N' \equiv \pm' n'$, a_0', Λ_0' は新たな積分定数だ. 主要な項は,

$$h(u) + N'a(u) \to c_0'(u + u_0)\,, \tag{29.5.67}$$

$$a \to a_0' + \frac{i\, c_0'}{\pi}(u + u_0) \ln\left(\frac{c_0'(u + u_0)}{\Lambda_0'}\right) \tag{29.5.68}$$

となっている. この特異点に対するモノドロミー行列は,

$$M_- = \begin{pmatrix} 1 - 2N' & -2 \\ 2N'^2 & 1 + 2N' \end{pmatrix} \tag{29.5.69}$$

だ. このとき, これらの行列についての条件 (29.5.57) が満たされるのは,

$$N' = N - 1 \tag{29.5.70}$$

かつ, この場合に限るということはすぐに分かる. N として, どんな値をとっても差は生じない. なぜなら, 無限遠点で円周の回りを M 回だけ回転させて, N を偶数 $2M$ だけ変化させることが出来るからであり, 反転 $u \leftrightarrow -u$ により 1 だけ変化させることができるからだ. サイバーグとウィッテンは $N' = -1$ となるように $N = 0$ と選んだ. このとき $u \to u_0$ について,

$$h(u) \to c_0(u - u_0)\,, \tag{29.5.71}$$

$$a(u) \to a_0 + \frac{i\, c_0}{\pi}(u - u_0) \ln\left(\frac{u - u_0}{\Lambda_0}\right) \tag{29.5.72}$$

であり, $u \to -u_0$ に対して,

$$h(u) - a(u) \to c_0'(u + u_0)\ , \tag{29.5.73}$$

$$a(u) \to a_0' + \frac{i\,c_0'}{\pi}(u + u_0)\ln\left(\frac{u + u_0}{\Lambda_0'}\right) \tag{29.5.74}$$

だ.

破れていない $\mathbb{Z}_8$ 対称性条件 (29.5.54) をここで課す. $u \to -u_0$ の場合, $-ia(-u)$ のように書いて (29.5.72) を使うと, $a(u)$ を計算できる. すると $u \to -u_0$ について,

$$a(u) \to -ia_0 + \frac{c_0}{\pi}\ln\left(\frac{-c_0(u + u_0)}{\Lambda_0}\right) \tag{29.5.75}$$

となる. これと (29.5.74) とを比較すると $c_0' = i\,c_0$ が分かり, (29.5.73) は $u \to -u_0$ の場合,

$$h(u) - a(u) \to i\,c_0\,(u + u_0) \tag{29.5.76}$$

となる.

場 a は, ゲージ結合定数 e の因子を含むように定義されており, e を評価するくりこみ点を適切に選ぶことにより任意の値にとれる. サイバーグとウィッテンはスケール a と u を (無限遠点で $u = a^2/2$ を保ちながら) $u_0 = 1$ となるように選んで定義した. つまり, 特異点は $u = \pm 1$ に存在する. この定義を使って, 彼らは (複素平面で -1 から $+1$ まで走るカットを定義し), 解

$$a_{\rm SW}(u) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1} dx\,\sqrt{\frac{u - x}{1 - x^2}}\ , \tag{29.5.77}$$

$$h_{\rm SW}(u) = \frac{i\sqrt{2}}{\pi}\int_{1}^{u} dx\,\sqrt{\frac{u - x}{x^2 - 1}} \tag{29.5.78}$$

を得た. これらの結果を得るために用いた元々の数学的方法は, この本の範囲を越えているが, 好運にも彼らの結果の正誤を確かめるのは難しくはない.

まず $a_{\rm SW}(u)$ と $h_{\rm SW}(u)$ は $u=\pm 1$ の近傍で, 真の解と同じ形の特異な振舞い (29.5.71),(29.5.72),(29.5.75),(29.5.76) をすることを確かめよう. $u\to 1$ の場合, (29.5.77) から,

$$\begin{aligned} a_{\rm SW}(u) &\to \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}+\frac{u-1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x)(u-x)}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}}+\frac{u-1}{2\pi}\ln\left(\frac{u-1}{3+u-2\sqrt{2}\sqrt{1+u}}\right) \\ &\to \frac{4}{\sqrt{\pi}}-\frac{u-1}{2\pi}\ln\Big(4(u-1)\Big) \end{aligned} \tag{29.5.79}$$

となる. また, (29.5.78) から,

$$h_{\rm SW}(u)\to\frac{i}{\pi}\int_{1}^{u}dx\,\sqrt{\frac{u-x}{x-1}}=\frac{i\,(u-1)}{2} \tag{29.5.80}$$

が得られる. (29.5.79) と (29.5.80) は以前の結果 (29.5.71) と (29.5.72) に一致し, $c_0=i$ かつ $a_0=4/\sqrt{\pi}$ だ. (29.5.77) は $\mathbb{Z}_8$ 反転特性 (29.5.54) を満たし, $u\to -1$ の場合, $a_{\rm SW}(u)$ は自動的に (29.5.75) の振舞いをする. ($u=-1$ から $u=+1$ まで走るカットによる平方根の符号にしかるべく注意を払うと) u が -1 に近い場合には, 直接 (29.5.77) と (29.5.78) から, $h_{\rm SW}(u)-a_{\rm SW}(u)$ が $u+1$ に比例することが言える.

$a_{\rm SW}(u)$, $h_{\rm SW}(u)$ は, $u\to\pm 1$ で $a(u)$, $h(u)$ と同じ特異性を持つので, 同じモノドロミー ($N=0$ と $N'=-1$ の (29.5.59) と (29.5.69)) を持つ. つまり, u が点 $+1$ の回りを一周すると,

$$\begin{pmatrix} a_{\rm SW} \\ h_{\rm SW}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\rm SW} \\ h_{\rm SW}\end{pmatrix} \tag{29.5.81}$$

を得るが, u が点 -1 の回りを一周すると,

$$\begin{pmatrix} a_{\rm SW} \\ h_{\rm SW}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{\rm SW} \\ h_{\rm SW}\end{pmatrix} \tag{29.5.82}$$

を得る.

さて, 関数

$$f(u) \equiv a(u)h_{\rm SW}(u) - a_{\rm SW}(u)h(u) \qquad (29.5.83)$$

を考えよう. これは $SL(2,\mathbb{Z})$ 不変量であり, 自明なモノドロミーを持つ. つまり, u が $+1$ か -1 の回りを一周すると同じ値に戻ってくる. $a(u)$, $h(u)$, $a_{\rm SW}(u)$, $h_{\rm SW}(u)$ における有限な特異点は, ± 1 における対数関数的な特異点のみだ. しかし, $f(u)$ は自明なモノドロミーを持つので, $f(u)$ はこれらの特異点は持たず, したがって, 全ての有限な点で解析的となる.

整関数 $f(u)$ を評価するために, 関数 $a_{\rm SW}(u)$ と $h_{\rm SW}(u)$ の漸近的振舞いを決める主要な項は, それぞれ $a(u)$ と $h(u)$ の主要な項と同一であることをまず確かめよう. $u \to \infty$ のとき, (29.5.77) から,

$$a_{\rm SW}(u) \to \frac{\sqrt{2u}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{2u} \qquad (29.5.84)$$

となるが, (29.5.78) から,

$$h_{\rm SW}(u) \to \frac{i\sqrt{2u}}{\pi}\int_{1}^{u}\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \to \frac{i\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{u}\ln u \qquad (29.5.85)$$

となる. これは $a(u)$ と $h(u)$ の主要項の振舞い (29.5.55) と同じだ.

これ自身からは $u \to \infty$ につれて $f(u)/u\ln u \to 0$ が分かるのみだ. しかし, 双方の関数における次に主要な項は $\sqrt{u}/u^2$ の大きさであることが, $a(u)$ とその対応物 $a_{\rm SW}(u)$ についての反転対称性 (29.5.54) から分かることに注意しよう. また, $h(u)$ と $h_{\rm SW}(u)$ における次に主要な項は $\sqrt{u}$ の大きさだ. これより, $f(u)$ の漸近的振舞いを決める主要な項を, $a(u) = a_{\rm SW}(u) = \sqrt{2u}$ と置いて, $u \to \infty$ に対して $f(u) = O(u)$ とすることにより計算できることが分かる. $f(u)$ は整関数なので, これは $f(u)$ が u について線形であることを意味する. しかし, $f(u)$ は, $h(u)$ と $h_{\rm SW}(u)$ が $O(u-1)$ である $u = +1$ でゼロとなり, $f(u)$ はまた, $a(u) - h(u)$ と $a_{\rm SW}(u) - h_{\rm SW}(u)$ が $O(u-1)$ となる $u = -1$ でゼロとな

る. したがって, 全ての場所でゼロとならなければならない. こうして,

$$\frac{a_{\rm SW}(u)}{a(u)} = \frac{h_{\rm SW}(u)}{h(u)} \equiv g(u) \qquad (29.5.86)$$

と結論付けられる. 次に関数 $g(u)$ の性質を考えなければならない. $h_{\rm SW}(u)$ と $h(u)$ は, $u = -1$ を除き全ての有限な点で解析的であり, $a_{\rm SW}(u) - h_{\rm SW}(u)$ と $a(u) - h(u)$ は $u = +1$ を除き全ての有限な点で解析的なので, $g(u)$ は (それはまた $[a_{\rm SW}(u) - h_{\rm SW}(u)]/[a(u) - h(u)]$ とも書けるが) 全ての点で解析的であることが分かる. ($u \neq \pm 1$ で $a(u)$ あるいは $h(u)$ のゼロ点は存在しない. 共通のゼロ点が無いのは言うまでもない. なぜなら, $a(u)$ あるいは $h(u)$ のゼロ点が存在すると, 電荷を持った粒子や磁気単極子の質量がゼロとなる点が存在するが, $u \neq \pm 1$ の場合, それは起こらないと仮定しているからだ.) また, 関数 $a_{\rm SW}(u)$ と $h_{\rm SW}(u)$ の $u \to \infty$ での漸近的振舞いを決める主要な項は, それぞれ $a(u)$ と $h(u)$ の主要な項と同じであるという事実から, $u \to \infty$ のとき $g(u) \to 1$ だと分かる. このとき, 整関数 $g(u)$ は全ての u について 1 に等しくなければならないことになり, すでに示したように,

$$a(u) = a_{\rm SW}(u)\,, \quad h(u) = h_{\rm SW}(u) \qquad (29.5.87)$$

となる.

問題

1. 26章の問題4の模型で, $a \neq 0$ のときのウィッテン指標はどうなるか? $a = 0$ のときはどうか? $a = 0$ のときは, この模型で高次の効果により超対称性は破れるか? 説明しなさい.

2. $SO(N_c)$ ゲージ対称性を持ち, N ベクトル表現にある N_f 個の左カイラル・スカラー超場 Φ_n を持つくりこみ可能な超対称性理論を考える. 裸の超ポテンシャルがゼロとなる場合, 非摂動論的

なウィルソン流ラグランジアンの構造についてどういうことが言えるか？裸の超ポテンシャル $\sum_n \Phi_n \Phi_n$ があるときは何が言えるか？

3. ラグランジアン密度(29.5.22)を持つ理論において，スピノル場の強さをあらわす超場 W_α とその双対場 $\tilde{W}_\alpha$ を考えたとき，成分場の間にある関係は何か？

参考文献

1. E. Witten, *Nucl. Phys.* **B185**, 513 (1981). これは *Supersymmetry*, S. Ferrara編 (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapore, 1987) に再録されている．

1*a*. J. Hughes and J. Polchinski, *Nucl. Phys.* **B278**, 147 (1986); J. Hughes, J. Liu, and J. Polchinski, *Phys. Lett.* **B 180**, 370 (1986); J. Bagger and A. Galperin, *Phys. Lett.* **B336**, 25 (1994); *Phys. Rev.* **D55**, 1091 (1997); *Phys. Lett.* **B412**, 296 (1997); L. Antoniadis, H. Partouche, and T. R. Taylor, *Phys. Lett.* **B372**, 83 (1996); S. Ferrara, L. Girardello, and M. Porrati, *Phys. Lett.* **B376**, 275 (1996).

2. E. Witten, *Nucl. Phys.* **B202**, 253 (1982). これは参考文献1の *Supersymmetry* に再録されている．

3. A. C. Davis, M. Dine, and N. Seiberg, *Phys. Lett.* **125B**, 487 (1983); I. Affleck, M. Dine, and N. Seiberg, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1026 (1983); *Phys. Lett.* **137B**, 187 (1984), 参考文献1の *Supersymmetry* に再録; *Nucl. Phys.* **B241**, 493 (1984); *Nucl. Phys.* **B52**, 1677 (1984); *Phys. Lett.* **140B**, 59 (1984).

4. N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B318**, 469 (1993).

5. V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, and V. I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B229**, 381 (1983); *Nucl. Phys.* **B260**, 157 (1985); G. C. Rossi and G. Veneziano, *Phys. Lett.* **138B**, 195 (1984), 参考文献1の*Supersymmetry*に再録; S. F. Cordes, *Nucl. Phys.* **B273**, 629 (1986). 概説はM. A. Shifman and A. I. Vainshtein, *ITEP Lectures in Particle Physics and Field Theory*, M. A. Shifman 編Vol.2, pp. 485-648, (World Scientific, Singapore, 1999)を見よ.

6. E. Witten, *J. High Energy Phys.* **9802**, 006 (1998).

7. V. G. Kac and A. V. Smilga, *The many faces of the superworld*, M. A. Shifman編, pp. 185-234.

8. I. Affleck, M. Dine, and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B256**, 557 (1985).

9. N. Seiberg, *Phys. Rev.* **D49**, 6857 (1994).

10. N. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B426**, 19 (1994); *erratum, Nucl. Phys.* **B430**, 485 (1994). ハイパー多重項を持つ$N = 2$理論への拡張はN. Seiberg and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B431**, 484 (1994)に与えられている. 概説はK. Intriligator and N. Seiberg, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **45BC**, 1 (1996)を見よ. また, *Summer School in High Energy Physics and Cosmology, Trieste, 1995*, E. Gava編. (World Scientific, Singapore, 1997)と, *QCD and Beyond: Proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder Colorado, 1995*, D. E. Soper編. (World Scientific, Singapore, 1996)に概説は出版されている.

11. E. Witten, *Phys. Lett.* **86B**, 283 (1979).

12. N. Seiberg, *Phys. Lett.* **B206**, 75 (1988).

第30章

超ダイアグラム

1940年代後半に導入されたファインマン・ダイアグラムによって, ローレンツ不変性が摂動計算のあらゆる段階で陽に保存されるという大きな利点が得られた. このためには任意の仮想粒子の全てのスピン状態の交換は単一のプロパゲーターによって記述されことが必要だった. 幸いなことに, さらに歩を進めて, あらゆる段階でローレンツ不変性ばかりでなく超対称性も陽に保存する超ダイアグラム形式を発展させことが可能になってきた.[1] そうするには, 与えられた超場で記述される全ての粒子の交換は単一の超プロパゲーターで記述される必要がある.

ここで, 積分すべき左カイラル超場 Φ には微分拘束条件 $\mathcal{D}_R\Phi = 0$ が課されていることが問題となる. これは電磁理論で場の強度テンソルに微分拘束条件である斉次マックスウェル方程式が課されている問題と似ている. 電磁理論では, 場の強度テンソルをベクトル・ポテンシャルで表現し, 場の強度テンソルではなくベクトル・ポテンシャルについて経路積分することによってこの問題を処理する. 全く同様にして, ここでは左カイラル超場をポテンシャル超場で表現することで左カイラル拘束条件を満たし, このポテンシャル超場について経路積

分する. この形式では, 電磁理論でゲージ不変性によってもたらされたのと類似の問題に遭遇するが, これも全く同様に処理される.

超ダイアグラム形式から得られる最も重要な結果は超ポテンシャルについての非くりこみ定理であった.[2] この定理は, サイバーグが発展させたはるかに容易で間接的な方法を使って27.6節で既に証明した. この方法は非摂動論的な効果の記述にも拡張できる. しかしながら, くりこみ効果のこれらの驚くべき相殺が実際の摂動計算でどのように起こるのかを見るのは興味深い.

30.1 ポテンシャル超場

左カイラル超場 $\Phi_n(x,\theta)$ とその複素共役場の理論を考える. ただし, 簡単のためゲージ超場は含まないとする. 成分場の時間順序積の真空期待値は全てこれらの超場の時間順序積の真空期待値から計算される. 経路積分の式

$$\left\langle T\left\{\Phi_{n_1}(x_1,\theta_1),\,\Phi_{n_2}(x_2,\theta_2),\,\cdots\right\}\right\rangle$$
$$= \int\left[\prod_{n,x,\theta} d\Phi_n(x,\theta)\right]\exp\Big(i\,I[\Phi]\Big)$$
$$\times\,\Phi_{n_1}(x_1,\theta_1)\,\Phi_{n_2}(x_2,\theta_2)\cdots\,. \tag{30.1.1}$$

からこれを計算してみよう. ここで $I[\Phi]$ は以下の作用だ.

$$I[\Phi]=\frac{1}{2}\int d^4x\Big[\sum_n \Phi_n^*(x,\theta)\Phi_n(x,\theta)\Big]_D + 2\,\mathrm{Re}\int d^4x\Big[f(\Phi)\Big]_{\mathcal{F}}\,. \tag{30.1.2}$$

(第 1 項の因子 1/2 は (26.4.3) と同様に Φ の成分場に通常の規格化を与えるために導入した.) しかし (30.1.1) から超ダイアクラムのファインマン則を簡単に読みとることは不可能だ. なぜなら超場 Φ_n につい

ての汎関数積分は左カイラル条件 $\mathcal{D}_R\Phi_n = 0$ を満たすように条件が付いているからだ.

これは電磁理論の同様の問題に類似している. 12.3節で述べたように, 電子質量以下のエネルギーでは軟光子同士の相互作用は以下の形の有効作用で記述される.

$$I[f] = -\frac{1}{4}\int d^4x \left[f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} + c_1\Big(f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}\Big)^2 + c_2\Big(\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\mu\nu}f^{\rho\sigma}\Big)^2 \right] .$$

しかし経路積分が斉次マックスウェル方程式

$$\partial_\mu f_{\nu\rho} + \partial_\nu f_{\rho\mu} + \partial_\rho f_{\mu\nu} = 0$$

によって拘束されている事実を考慮せずにこの式からファインマン則を読み取ることはできない. 誰でも知っているように, $f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ を満たし, したがって拘束条件が自動的に満たされる4元ベクトル・ポテンシャル A_μ を導入し, $f_{\mu\nu}(x)$ ではなく $A_\mu(x)$ について積分することで, この拘束条件は処理される.

同様に, 超場の方程式を導くために既に26.6節で使った技法を採用して,

$$\Phi_n = \mathcal{D}_R^2 S_n \tag{30.1.3}$$

ただし,

$$\mathcal{D}_R^2 \equiv \sum_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}\mathcal{D}_{R\alpha}\mathcal{D}_{R\beta} \tag{30.1.4}$$

を満たす非カイラルなポテンシャル超場 $S_n(x,\theta)$ を導入し, Φ_n が自動的に左カイラル条件 $\mathcal{D}_{R\alpha}\Phi_n = 0$ を満たすようにすることができる. すると, (30.1.1) の代りに以下の経路積分式が得られる.

$$\left\langle T\Big\{\Phi_{n_1}(x_1,\theta_1),\ \Phi_{n_2}(x_2,\theta_2),\ \cdots\Big\}\right\rangle$$

$$= \int \left[\prod_{n,x,\theta} dS_n(x,\theta) \right] \exp\Big(i\, I[\mathcal{D}_R^2 S]\Big)$$
$$\times\, \mathcal{D}_R^2 S_{n_1}(x_1,\theta_1)\, \mathcal{D}_R^2 S_{n_2}(x_2,\theta_2) \cdots . \tag{30.1.5}$$

作用 (30.1.2) を S_n で表す際に, 超微分の D 項は作用には寄与しないので, (30.1.2) の第 1 項の S_n^* に作用する演算子 $(\mathcal{D}_R^2)^* = \mathcal{D}_L^2$ を S_n に作用するように移動してよいことに留意すると,

$$I[\mathcal{D}_R^2 S] = \frac{1}{2} \int d^4x \left[\sum_n S_n^* \mathcal{D}_L^2 \mathcal{D}_R^2 S_n \right]_D + 2\,\mathrm{Re} \int d^4x\, \Big[f(\mathcal{D}_R^2 S) \Big]_{\mathcal{F}} \tag{30.1.6}$$

となる. $f(\mathcal{D}_R^2 S)$ のどの項においても任意の $\mathcal{D}_R^2 S$ 因子の $\mathcal{D}_R^2$ 演算子は項全体に作用するとしてよい. なぜなら $\mathcal{D}_R$ はその項の他のどの $\mathcal{D}_R^2 S$ 因子に作用してもゼロになるからだ. このようにして,

$$f(\mathcal{D}_R^2 S) = \mathcal{D}_R^2\, \tilde{f}(S) \tag{30.1.7}$$

と書くことができる. ここで $\tilde{f}(S)$ は $f(\mathcal{D}_R^2 S)$ から各項の $\mathcal{D}_R^2$ 演算子のどれか一つを消去して得られる. 例えば, 1 種類だけの超場の場合について, $f(\Phi) = \sum_r c_r \Phi^r$ ならば,

$$\tilde{f}(S) = \sum_r c_r S\, (\mathcal{D}_R^2 S)^{r-1}$$

となる. (30.1.6), (30.1.7), (26.3.31) を使うと, 作用全体を以下の通り D 項の形に書ける.

$$I[\mathcal{D}_R^2 S] = \frac{1}{2} \int d^4x\, \sum_n \Big[S_n^* \mathcal{D}_L^2 \mathcal{D}_R^2 S_n \Big]_D + 2\,\mathrm{Re} \int d^4x\, \Big[\tilde{f}(S) \Big]_D . \tag{30.1.8}$$

(26.6.5) よりこれは超空間積分

$$I[\mathcal{D}_R^2 S] = -\frac{1}{4} \int d^4x \int d^4\theta\, \sum_n S_n^* \mathcal{D}_L^2 \mathcal{D}_R^2 S_n - \mathrm{Re} \int d^4x \int d^4\theta\, \tilde{f}(S) \tag{30.1.9}$$

と書くこともできる．これが超ダイアグラム形式を経路積分を使って導出する時に使う作用だ．

30.2 超プロパゲーター

通常，プロパゲーターは作用の場について 2 次の部分から直接得られる．この 2 次部分を，エルミートな D_{ij} を使って複素場 ϕ_i (i は時空間座標，スピン，種類の添字を含む複合的な添字だ) について，

$$I_{\rm quad}[\phi] = -\sum_{ij} D_{ij}\phi_i^*\phi_j \tag{30.2.1}$$

の形で書くと，9.4 節で説明したようにプロパゲーターは単に $\Delta = D^{-1}$ だ．作用の 2 次部分がある種の「ベクトル」 ξ について (線形化された) ゲージ変換

$$\phi_i \to \phi_i + \xi_i \tag{30.2.2}$$

のもとで不変なとき，これに問題が生じる．この場合，

$$\sum_i D_{ij}\xi_j = 0 \tag{30.2.3}$$

なので明らかに「行列」 D_{ij} には逆が存在しない．電磁理論でこの問題が起こるのはラグランジアン密度がゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda$ のもとでゲージ不変なためだ．今の場合にも，同様な問題がある．すなわち，作用は実際には S_n そのものではなく $\mathcal{D}_R^2 S_n$ の汎関数なので，任意の超場 X_n について，

$$S_n \to S_n + \mathcal{D}_R X_n \tag{30.2.4}$$

の変換のもとで不変だ．

荷電粒子の電磁理論ではゲージ不変性の問題は，例えば 15.5 節で説明したファデーフ・ポポフ・ド・ウィットの方法のようにゲージを選

択することで通常は処理される. しかし変換 (30.2.2) のもとでの不変性によってここで生じている問題は, 荷電粒子が生成される閾値以下のエネルギーでの光子の有効場理論の問題にはるかによく似ている. この有効相互作用では, 単純に作用がゲージ不変な場のみを含むという理由で理論が不変になっている. そのような理論ではもっと簡単な方法がある. D_{ij} の固有値ゼロの固有ベクトル ξ_i (簡単のため, ある決まった方向に取っておく) に加えて固有値 $d_\nu \neq 0$ の固有ベクトルの正規直交系 $u_{\nu i}$ を見つけることができる.

$$\sum_j D_{ij}\, u_{\nu j} = d_\nu\, u_{\nu i}\ , \quad \sum_i u^*_{\nu i}\, u_{\nu' i} = \delta_{\nu\nu'}\ , \quad \sum_i u^*_{\nu i}\, \xi_i = 0\ . \tag{30.2.5}$$

以下のように新しい積分変数の組 ϕ' と ϕ'_ν を導入できる.

$$\phi_i = \phi'\, \xi_i + \sum_\nu \phi'_\nu\, u_{\nu i}\ . \tag{30.2.6}$$

すると量子期待値のファインマン・ダイアグラムによる計算に登場する種類の積分は,

$$\begin{aligned}\int \left[\prod_i d\phi_i\, d\phi_i^*\right] \exp\{iI_{\rm quad}[\phi]\}\phi_a \cdots \phi_b^* \cdots &= \mathcal{J} \int d\phi'\, d\phi'^* \\ \times \int \left[\prod_\nu d\phi'_\nu\, d\phi'^*_\nu\right] \exp\left\{-i\sum_\nu d_\nu |\phi'_\nu|^2\right\} &\left[\phi'\xi_a + \sum_\nu \phi'_\nu u_{\nu a}\right] \cdots \\ \times \left[\phi'\xi_b + \sum_\nu \phi'_\nu u_{\nu b}\right]^* \cdots\end{aligned} \tag{30.2.7}$$

と書ける. ここで $\mathcal{J}$ は変換 (30.2.6) のヤコビアンだ. ϕ' と ϕ'^* は指数関数の引数に現れないので, その積分はもちろんよく定義されない. しかしこれは作用がゲージ不変な場しか含んでいなければ問題にならない. なぜならその場合, ϕ_a, ϕ_b 等は,

$$\sum_a \xi_a J_a = 0 \tag{30.2.8}$$

を満たす「カレント」 J_a, J_b 等と縮約されるからだ．したがって (30.2.7) を，

$$\int \left[\prod_i d\phi_i \, d\phi_i^*\right] \exp\{iI_{\rm quad}[\phi]\}\phi_a \cdots \phi_b^* \cdots = \mathcal{C} \int \left[\prod_\nu d\phi'_\nu d\phi'^*_\nu\right] \times \exp\left\{-i\sum_\nu d_\nu |\phi'_\nu|^2\right\} \left[\sum_\nu \phi'_\nu u_{\nu a}\right] \cdots \left[\sum_\nu \phi'_\nu u_{\nu b}\right]^* \cdots + [\,\xi\text{ 項}\,] \tag{30.2.9}$$

と書くことができる．ここで「ξ 項」は ξ_a, ξ_b 等の一つ以上の因子に比例する項を表し, (30.2.8) を満たす J と縮約するとゼロになる．また $\mathcal{C}$ は無限大の定数 $\mathcal{J}\int d\phi'$ だ．こうして ϕ'_ν の積分から,

$$\int \left[\prod_i d\phi_i \, d\phi_i^*\right] \exp\{iI_{\rm quad}[\phi]\}\phi_a \cdots \phi_b^* \cdots \propto \sum_{\text{対}} \Big[-i\Delta_{ab}\Big] \cdots + [\,\xi\text{ 項}\,] \tag{30.2.10}$$

が得られる．ここで, 「対」についての和は ϕ の添字と ϕ^* の添字との対の取り方の全てについて取り, Δ_{ab} は以下のプロパゲーターだ．

$$\Delta_{ab} = \sum_\nu \frac{u_{\nu a}\, u^*_{\nu b}}{d_\nu}\ . \tag{30.2.11}$$

(30.2.11) の和を実際に計算する代りに, その定義から得られる

$$\sum_c D_{ac}\Delta_{cb} = \sum_\nu u_{\nu a}\, u^*_{\nu b} \equiv \Pi_{ab} \tag{30.2.12}$$

という性質を使うことができる．ここで Π は ξ に直交する空間への以下の射影演算子だ．

$$\Pi^2 = \Pi\ , \qquad \Pi\xi = 0\ . \tag{30.2.13}$$

(30.2.12) の解は ξ 項だけを除いて一意的だが, 場 ϕ_i がゲージ不変な組み合わせでのみ作用に現れるのならこれは問題にはならない．

例えば, 電磁理論では作用の運動項の部分は,

$$I_{\text{quad}}[A] = -\frac{1}{4}\int d^4x\ f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} = +\frac{1}{2}\int d^4x\ A^\mu\Big(\Box\delta_\mu^\nu - \partial_\mu\partial^\nu\Big)A_\nu$$

と書くことができる. 微分演算子 $-\Box\delta_\mu^\nu + \partial^\nu\partial_\mu$ は, $\xi^\mu = \partial^\mu\Lambda$ の形の固有ベクトルに対応するゼロ固有値を持つので, 逆が取れない. これらのベクトルに直交する空間への射影行列は次のとおりだ.

$$\Pi_\mu{}^\nu(x,y) = [\delta_\mu{}^\nu - \partial_\mu\partial^\nu\Box^{-1}]\delta^4(x-y)\ .$$

ここで $\Box^{-1}\delta^4(x-y)$ は方程式 $\Box[\Box^{-1}\delta^4(x-y)] = \delta^4(x-y)$ の任意の解だ. プロパゲーターの定義式は,

$$\Big(-\Box\delta_\mu^\lambda + \partial_\mu\partial^\lambda\Big)\Delta_\lambda{}^\nu(x,y) = \Pi_\mu{}^\nu(x,y)$$

で, その解は,

$$\Delta_\mu{}^\nu(x,y) = \delta_\mu^\nu\,\Delta_F(x-y) + [\partial_\mu\partial^\nu\ \text{項}\,]$$

となる. ここで $\Delta_F(x-y)$ は $\Box\Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y)$ を満たす通常のファインマン・プロパゲーター (6.2.16) だ. (A_μ は実の場なので, 作用の 1/2 の因子はここではプロパゲーターの定義式に現れない. (6.2.16) のフーリエ積分の分母に現れる $-i\epsilon$ の起源は9.2節の経路積分形式で説明した.)

(30.1.9) の第 1 項を見ると, ポテンシャル超場の超プロパゲーターの定義式は以下の通りだと分かる.

$$\frac{1}{4}\mathcal{D}_L^2\,\mathcal{D}_R^2\,\Delta_{nm}^S(x,\theta;x',\theta') = \mathcal{P}\delta^4(x-x')\delta^4(\theta-\theta')\delta_{nm}\ . \qquad (30.2.14)$$

ここで $\mathcal{P}$ は, 射影演算子の条件

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}\ , \qquad \mathcal{P}\mathcal{D}_R = 0 \qquad (30.2.15)$$

を満たす超空間の微分演算子で, $\delta^4(\theta-\theta')$ は(26.6.8)で導入したフェルミオン的デルタ関数だ. この解は,

$$\mathcal{P}=\frac{-1}{16\Box}\mathcal{D}_L^2\,\mathcal{D}_R^2 \tag{30.2.16}$$

となる. ($\mathcal{P}\mathcal{D}_R=0$ は自明だ. $\mathcal{P}^2=\mathcal{P}$ を確かめるには(26.6.12)を使う必要があり, これから $\mathcal{D}_R^2\mathcal{D}_L^2\mathcal{D}_R^2=-16\Box\mathcal{D}_R^2$ となる.) (30.2.14) の解は, 以下のとおりだ.

$$\begin{aligned}\Delta^S_{nm}(x,\theta;x',\theta')&=-\frac{1}{4\Box}\delta^4(x-x')\delta^4(\theta-\theta')\delta_{nm}+[\,\mathcal{D}_R\text{ 項}\,]\\&=\frac{1}{4}\Delta_F(x-x')\delta^4(\theta-\theta')\delta_{nm}\;+[\,\mathcal{D}_R\text{ 項}\,].\end{aligned} \tag{30.2.17}$$

これはポテンシャル超場 $S^*_m(x',\theta')$ によって生成されポテンシャル超場 $S_n(x,\theta)$ によって消される線に対応する超プロパゲーターで, 作用(30.1.9)の超ダイアグラムを計算するときにはこれを使う必要がある. 通常のプロパゲーターと比較するために, 左カイラル超場 $\Phi^*_m(x',\theta')$ によって生成され左カイラル超場 $\Phi_n(x,\theta)$ によって消される線に対応する超プロパゲーターを考えることも興味深い. これらのカイラル超場は $S_n(x,\theta)$ に $\mathcal{D}_R^2$ を作用させ $S^*_m(x',\theta')$ に ${\mathcal{D}'}_R^{2\,*}={\mathcal{D}'}_L^2$ を作用させて得られるので, 左カイラル超場のプロパゲーターは,

$$\Delta^\Phi_{nm}(x,\theta;x',\theta')=\frac{1}{4}\mathcal{D}_R^2{\mathcal{D}'}_L^2\Delta_F(x-x')\,\delta^4(\theta-\theta')\,\delta_{nm} \tag{30.2.18}$$

となる.

例えば, 超プロパゲーターの θ と θ' についてゼロ次の項は, 次のとおりだ.

$$\begin{aligned}\Big[\Delta^\Phi_{nm}(x,\theta;x',\theta')\Big]_{\theta=\theta'=0}&=\frac{1}{4}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta_R}\Big)^2\Big(\frac{\partial}{\partial\theta'_L}\Big)^2\\&\quad\times\Delta_F(x-x')\,\delta^4(\theta-\theta')\,\delta_{nm}\,.\end{aligned} \tag{30.2.19}$$

これを計算するには，フェルミオン的デルタ関数の式(26.6.8)

$$\delta^4(\theta-\theta')=\frac{1}{4}\Big((\theta_L-\theta'_L)^{\mathrm{T}}\epsilon(\theta_L-\theta'_L)\Big)\Big((\theta_R-\theta'_R)^{\mathrm{T}}\epsilon(\theta_R-\theta'_R)\Big)$$

を思い出せばよく，これから $(\partial/\partial\theta_R)^2(\partial/\partial\theta'_L)^2\delta^4(\theta-\theta')=4$ が分かる．したがって(30.2.19) より，

$$\Big[\Delta^{\Phi}_{nm}(x,\theta;x',\theta')\Big]_{\theta=\theta'=0}=\Delta_F(x-x')\,\delta_{nm} \qquad (30.2.20)$$

が得られる．これは超場のスカラー成分の通常のプロパゲーターだ．

30.3 超ダイアグラムを用いた計算

次に前節の結果を使って，古典ポテンシャル超場 $S_n(x,\theta)$ とその共役場の組に対する量子有効作用 $\Gamma[S,S^*]$ を計算する方法を考えよう．16.1節で議論した処方に従って，この有効作用は，向き付けされた内線と外線が付いた頂点の集まりから成る全ての1粒子既約な連結超ダイアグラムについての和で定義できる．x,θ の添字を持つ頂点で終わるかまたはそこから始まる種類 n の外線の各々について，それぞれ $S_n(x,\theta)$ かまたは $S^*_n(x,\theta)$ のc数因子が含まれる(ただしプロパゲーターは含まない)．$n_1,n_2,\ldots,n_N$ の添字を持つ N 個の入って来る線または N 個の出て行く線が付いた x,θ の添字をもつ頂点はそれぞれ，i と超ポテンシャル $\tilde{f}(S)$ の $S_1S_2\cdots S_N$ 項の係数との積または i とこの係数の複素共役との積に等しい因子を生じる．x,θ の添字を持つ頂点から出て x',θ' の添字を持つ頂点に入る任意の種類の内線は(30.2.10)と (30.2.17)で与えられる以下のプロパゲーター因子を生じる．

$$-\frac{i}{4}\delta^4(\theta-\theta')\,\Delta_F(x-x')\,. \qquad (30.3.1)$$

さらに，(30.1.7)が示すように，超微分 $\mathcal{D}_R^2$ は，任意の頂点に入る内線または外線の一つを除く全てのプロパゲーターまたは外線の S 因子

に作用し, 超微分 $\mathcal{D}_L^2$ は任意の頂点から出る線の1つを除く全てのプロパゲーターまたは外線の S^* 因子に作用する. これらの因子の積は全ての x と θ について積分されなければならない. 量子有効作用は全ての1粒子既約ダイアグラムのこれらの積分の和だ.

超空間での部分積分によって, 任意の一つのプロパゲーター (例えば添字 x,θ と x',θ' を持つ頂点をつなぐプロパゲーター) に付随する $\mathcal{D}_L^2$ および(または) $\mathcal{D}_R^2$ 演算子を他のプロパゲーターまたは外線の因子に移動してよい. この結果, この内線からの寄与として $\delta^4(\theta-\theta')$ に比例する因子が残る. ここで θ' の積分をするとこのデルタ関数が消え, 他のあらゆる箇所の θ' が θ で置き換わる. (いくつかの内線が同じ頂点対をつなぐ場合には, フェルミオン的デルタ関数の $[\delta^4(\theta-\theta')]^2=0$ という性質を使う必要がある.) この操作を続けて, 最後に一つの4 次元 θ 積分が残り, 全ての $\mathcal{D}$ は外線の因子 S_n と S_m^* に作用する. すなわち, $\Gamma[S,S^*]$ は空間座標について通常局所的ではないが, フェルミオン的座標については局所的だ.

この汎関数の構造は「ゲージ」変換 (30.2.4) のもとでの不変性で規定されている. このことから外線因子 S_n または S_n^* にはどれも, 二つの可能な例外を除いて, それぞれ演算子 $\mathcal{D}_R^2$ または $\mathcal{D}_L^2$ が作用しなければならないことが分かる. 例外は, 入って来る外線だけか出て行く外線だけの項では, 外線因子 S_n または S_n^* の一つを除いてすべてにそれぞれ $\mathcal{D}_R^2$ または $\mathcal{D}_L^2$ が作用し, 他の超微分は作用しないが, そのような項は, たとえ Φ_n および(または) Φ_n^* のみの汎関数の4 次元 θ 積分として表すことができなくても, やはり変換 (30.2.4) のもとで不変だという点だ. なぜなら, そのような振幅のこの変換のもとでの変化は, 演算子 $\mathcal{D}_R^2$ または $\mathcal{D}_L^2$ が作用しない外線因子 S_n または S_n^* の変化からのみ生じることができ, この変化は部分積分を使って他の $\mathcal{D}_R^2$ または $\mathcal{D}_L^2$ 演算子の一つを移動してこれに作用するようにすれば消去できるからだ. 30.1節で見たように, $\Gamma[S,S^*]$ のそのような項は

Φ_n または Φ_n^* の汎関数の $\mathcal{F}$ 項なので, 超ポテンシャルまたはその複素共役に補正を生じさせる. これらの例外を除いて, $\Gamma[S,S^*]$ の全ての項は Φ_n および(または) Φ_n^* のみの汎関数の4次元 θ 積分で書くことができ, したがって有効作用の D 項部分に補正を生じさせる.

また, 外線因子 S_n または S_n^* の一つを除く全てにそれぞれ $\mathcal{D}_R^2$ または $\mathcal{D}_L^2$ が作用し, かつそれに加えて $\mathcal{D}_R^2$ または $\mathcal{D}_L^2$ 演算子が ($\mathcal{D}_R^2\mathcal{D}_L^2\mathcal{D}_R^2S_n$ や $\mathcal{D}_L^2\mathcal{D}_R^2\mathcal{D}_L^2S_n^*$ のような組み合わせで) 作用する量子有効作用の項は, 部分積分によって余分な $\mathcal{D}_R^2$ または $\mathcal{D}_L^2$ の一つがそれ以前には微分されていない外線の S_n または S_n^* 因子に作用する項として書くことも可能だ. したがってそのような項は Φ_n および(または) Φ_n^* のみの汎関数の4次元 θ 積分として表され, それゆえ作用の D 項部分に別の補正を加える. $\Gamma[S,S^*]$ の項でこのように書けない唯一の項は, E 本の入って来る外線を持ち $E-1$ 個だけの $\mathcal{D}_R^2$ 演算子が外線因子 S_n に作用するものか, E^* 本の入って来る外線を持ち E^*-1 個だけの $\mathcal{D}_L^2$ 演算子が外線因子 S_n^* に作用するものだけだ. したがって, 超ダイアグラムが超ポテンシャルまたはその共役ポテンシャルに寄与するか否かは, 超ダイアグラムから $\Gamma[S,S^*]$ の対応する項に寄与する $\mathcal{D}_R^2$ または $\mathcal{D}_L^2$ 演算子の数を数えるだけで分かる.

これらの超微分の数を勘定しよう. n 本の線が入って来る V_n 個の頂点, n 本の線が出て行く V_n^* 個の頂点, I 本の内線, E 本の入って来る外線, そして E^* 本の出て行く外線を持つ連結ダイアグラムを考察する. これらの数には,

$$I+E=\sum_n nV_n\,, \qquad I+E^*=\sum_n nV_n^* \tag{30.3.2}$$

の関係がある. そこで演算子 $\mathcal{D}_R^2$ と $\mathcal{D}_L^2$ の総数は,

$$N_R=\sum_n V_n(n-1)=I+E-V=L+V^*+E-1 \tag{30.3.3}$$

および,

$$N_L = \sum_n V_n^*(n-1) = I + E^* - V^* = L + V + E^* - 1 \qquad (30.3.4)$$

となる. ここで $V = \sum_n V_n$ は入って来る線を持つ頂点の総数, $V^* = \sum_n V_n^*$ は出て行く線を持つ頂点の総数, また $L = I - V - V^* + 1$ はループの数だ. 何らかのループを含むダイアグラムは $N_R \geq E$ と $N_L \geq E^*$ を満たすので, 少なくとも全ての S_n を $\Phi_n = \mathcal{D}_R^2 S_n$ とその微分に変換するのに十分な $\mathcal{D}_R^2$ 演算子と, 全ての S_n^* を $\Phi_n^* = \mathcal{D}_L^2 S_n^*$ とその微分に変換するのに十分な $\mathcal{D}_L^2$ 演算子が存在する. したがってループを含む任意のダイアグラムは左カイラル超場 Φ_n とその共役場の汎関数の4次元 θ 積分, すなわち D 項のみに寄与する.

$\mathcal{F}$ 項またはその共役項への寄与があるのは, それぞれちょうど $N_R = E - 1$ 個の $\mathcal{D}_R^2$ 演算子, またはちょうど $N_L = E^* - 1$ 個の $\mathcal{D}_L^2$ 演算子が存在する場合だけだ. (30.3.3) と (30.3.4) に従って, そのようなダイアグラムは $L = 0$ と, それぞれ $V^* = 0$ または $V = 0$ を満たす. 言い換えれば, ここでは1粒子既約なダイアグラムのみを考えているので, 入って来る線を持つ頂点を1個だけ持つダイアグラムのみから $\mathcal{F}$ 項を得ることができ, 出て行く線を持つ頂点を1個だけ持つダイアグラムのみからその共役項を得ることができる. この寄与は元の超ポテンシャルまたは共役ポテンシャルの積分された $\mathcal{F}$ 項に他ならない. したがって, 摂動論の任意の次数で $\mathcal{F}$ 項の有限または無限大のくりこみは存在しないことがここでも分かる.

問題

1. (30.2.18) を使ってカイラル超場のスピノル成分と補助場成分のプロパゲーターを計算せよ.

2. 1 個だけの左カイラル超場 Φ の超対称性理論で, g を任意の複素定数としてラグランジアン密度

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\Phi^* \Phi\right]_D + 2\mathrm{Re}\left(g[\Phi^3]_{\mathcal{F}}\right)$$

を持つものを考える. 超ダイアグラム形式を使って量子有効作用への 1 ループの寄与を計算せよ. 答を通常の座標と一つのグラスマン座標 θ についての積分で表せ.

3. 運動項(27.3.17)を持つ超対称可換ゲージ理論で, ゲージ超場 $V(x,\theta)$ の超プロパゲーターはどのようなものか.

参考文献

1. A. Salam and J. Strathdee, *Phys. Rev.* **D11**, 1521 (1975); *Nucl. Phys.* **B86**, 142 (1975); D. M. Capper, *Nuovo Cimento* **25A**, 259 (1975); R. Delbourgo, *Nuovo Cimento* **25A**, 646 (1975); D. M. Capper and G. Leibrandt, *Nucl. Phys.* **B85**, 492 (1975); F. Krause, M. Scheunert, J. Honerkamp, and M. Schlindwein, *Phys. Lett.* **53B**, 60 (1974); K. Fujikawa and W. Lang, *Nucl. Phys.* **B88**, 61 (1975); J. Honerkamp, M. Schlindwein, F. Krause, and M. Scheunert, *Nucl. Phys.* **B95**, 397 (1975); S. Ferrara and O. Piguet, *Nucl. Phys.* **B93**, 261 (1975); R. Delbourgo, *J. Phys.* **G1**, 800 (1975). この形式は以下の論文で超重力に拡張された. W. Siegel, *Phys. Lett.* **84B**, 197 (1979).

2. M. T. Grisaru, W. Siegel, and M. Roček, *Nucl. Phys.* **B159**, 429 (1979).

第31章

超重力

重力は存在するので，超対称性に何らかの真実性があるならば，任意の現実的な超対称性理論は，物質と重力の超対称性理論である**超重力**に結局は拡張されなければならない．超重力の無い超対称性は選択肢にはないが，プランク・スケールよりずっと下のエネルギーでの良い近似物としてはあり得る．

超重力理論の構成に関して二つの主要なアプローチが存在する．一つ目として，超重力は，曲がった超空間の理論[1]として表現できる．このアプローチは，27.1節–27.3節で超対称性ゲージ理論を発展させたやり方に似ている．つまり，ゲージ超場Vの非物理的な成分C, M,N, ωのように，重力場は物理的な成分のみならず非物理的な成分を持つ超場の成分として現れる．このようにして，完全な非線形超重力理論を導くことは複雑で険しいものであり，いままでのところ一見任意性を持つように見える段階が排除されていない．重力超場についての拘束条件の組を採用する場合，それが適切だということを，導出の各段階で宣言する必要がある．

ここでは，あまり優美ではないがもっと明瞭な第2のアプローチ[2]に従う．ここでの議論では，31.1節–31.5節において重力場が弱い場合か

ら始め[3], 通常の超対称性理論を調べるために26章, 27章で用いた平坦時空上の超場についての方法と同じ方法を使うことにより, 超重力を解析する. このようにして, (ゲージ超場VのD成分に類似した補助場を含む)重力超場の物理的成分を同定できる. 弱場近似から超重力理論の最も重要な結果のいくつかが得られる. それは31.3節でのグラヴィティーノの質量についての一般的な表式や, 31.4節でのアノマリーを媒介とする超対称性の破れにより与えられるゲージーノの質量やAとBのパラメータについての結果を含むものだ.

31.6節では, 超対称性変換や一般座標変換が閉じた代数を成し, ラグランジアンがこれらの変換の下で不変だという条件を課しながら, 物理的場の超対称性変換則や相互作用を記述するラグランジアンに, Gの高次の項を付け加える. このアプローチはいくつかの点で27.8節における超対称性ゲージ理論の扱いと類似している. つまり, 重力超場の物理的成分のみを扱い, 通常の微分ではなく共変微分を含む変換則を得る. これは超重力理論の弱場近似を越えて, 最も重要な応用を導くときに使われてきたアプローチだ. つまり, 重力を媒介として超対称性が破れる理論での低エネルギー有効ラグランジアンの導出のときに使われるものだ. この応用は31.7節の主題となる.

31.1 計量超場

超重力は必然的にテンソル場のみならずスピノル場も含み, したがって重力場を計量よりもむしろ4脚場(あるいはテトラド) $e^a{}_\mu(x)$ を用いて記述しなければならない. 計量は4脚場と,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab}\, e^a{}_\mu(x)\, e^b{}_\nu(x) \tag{31.1.1}$$

により関連している. 添字μ, ν等は一般座標を表しており, 添字 a, b 等は局所慣性座標系での座標を表している. η_{ab}は通常の対角行列で

あり, 成分は+1, +1, +1, −1で与えられる. 4脚場形式では, 作用は二つの異なる種類の対称性変換の下で不変でなければならないことが要請される. 一つ目は一般座標変換$x^\mu \to x'^\mu(x)$であり, この下で4脚場$e^a{}_\mu(x)$は$e'^a{}_\mu(x)$へ変換される.

$$e'^a{}_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e^a{}_\nu(x) \; . \tag{31.1.2}$$

もう一つは局所ローレンツ変換であり, その下で,

$$e^a{}_\mu(x) \to \Lambda^a{}_b(x)\, e^b{}_\mu(x) \tag{31.1.3}$$

となる. ここで$\Lambda^a{}_b(x)$は拘束条件

$$\eta_{ab}\Lambda^a{}_c(x)\Lambda^b{}_d(x) = \eta_{cd} \tag{31.1.4}$$

を満たす任意の実数行列だ. この形式の初歩的な概説は, この章の補遺で与えられている.

弱い重力場というのは4脚場が単位行列に近い場合だ. そのような場では, $\phi^a{}_\mu(x)$を小さいとして, 4脚場を,

$$e^a{}_\mu(x) = \delta^a_\mu + 2\kappa\, \phi^a{}_\mu(x) \tag{31.1.5}$$

と書くのが便利だ. 31.2節で見るように, もし$\phi^a{}_\mu$が従来通りに規格化された場ならば, 定数κはニュートン定数Gにより$\kappa = \sqrt{8\pi G}$と表現される. 4脚場が単位行列に近いことは, 小さな座標変換

$$x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu(x) \tag{31.1.6}$$

と, 小さな局所ローレンツ変換

$$\Lambda^a{}_b(x) = \delta^a_b + \omega^a{}_b(x) \tag{31.1.7}$$

によって保存される. ここで$\xi^\mu(x)$と$\omega^a{}_b(x)$は$\phi^a{}_\mu(x)$と同じ大きさであり, $\omega_{ab}(x) \equiv \eta_{ac}\omega^c{}_b(x)$には(31.1.4)により, 拘束条件

$$\omega_{ab}(x) = -\,\omega_{ba}(x) \tag{31.1.8}$$

がついている．このとき, (31.1.2) と (31.1.3) を組み合わせた変換は,

$$\phi_{\mu\nu}(x) \to \phi_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2\kappa}\left[-\frac{\partial \xi_\mu(x)}{\partial x_\nu} + \omega_{\mu\nu}(x)\right] \tag{31.1.9}$$

となる．ここでは, 一般座標変換の添字 μ, ν 等と局所ローレンツ座標変換の添字 a, b 等の区別はせず, 全ての添字の上げ下げを $\eta^{\mu\nu}$ と $\eta_{\mu\nu}$ により行なう．計量 (31.1.1) を使うと, 弱場の仮定 (31.1.5) は,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa\, h_{\mu\nu}(x) \tag{31.1.10}$$

となる．ここで,

$$h_{\mu\nu}(x) \equiv \phi_{\mu\nu}(x) + \phi_{\nu\mu}(x) \tag{31.1.11}$$

とした．一方, 変換則 (31.1.9) は,

$$h_{\mu\nu}(x) \to h_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2\kappa}\left[\frac{\partial \xi_\mu(x)}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu(x)}{\partial x^\mu}\right] \tag{31.1.12}$$

となる．

25.4 節では超対称性代数を使って, 重力子がフェルミオン的な超パートナーであるヘリシティー ±3/2 のグラヴィティーノを持つことを示した．ヘリシティー ±1 を持つ荷電自己共役な質量の無い粒子を実場 $A_\mu(x)$ で表すと, この粒子はゲージ変換 $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$ の下で不変な低エネルギー相互作用のみを持つことを 5.9 節で見た．同様に, ヘリシティー ±3/2 を持つ荷電自己共役な質量の無い粒子を, 余分なベクトル添字 μ を持つマヨラナ場 $\psi_\mu(x)$ で表すと, この粒子はゲージ変換

$$\psi_\mu(x) \to \psi_\mu(x) + \partial_\mu \psi(x) \tag{31.1.13}$$

の下で不変な低エネルギー相互作用のみを持つことができる．ここで, $\psi(x)$ は任意のマヨラナ場[3a] だ．次に, これらの変換性を持つ場 $\phi_{\mu\nu}(x)$ と $\psi_\mu(x)$ がどのように超場を組むかについて調べる必要がある．

27.1節でゲージ場$V_\nu(x)$は実スカラー超場$V(x,\theta)$のV_ν成分と見なすことができるのを見た．これは(26.2.10)では$i(\bar{\theta}\gamma_5\gamma_\nu\theta)/2$の係数として定義されていた．同様に，4脚場$\phi_{\mu\nu}(x)$とグラヴィティーノ場$\psi_\mu(x)$を，**計量超場**として知られている**ベクトル**超場$H_\mu(x,\theta)$に組み入れたい．問題は，どのように$\phi_{\mu\nu}(x)$と$\psi_\mu(x)$をこの超場の成分に関連付けるかだ．

この質問に答えるには，「ゲージ」変換(31.1.9)と(31.1.13)は計量超場全体についての変換

$$H_\mu(x,\theta) \to H_\mu(x,\theta) + \Delta_\mu(x,\theta) \tag{31.1.14}$$

の特別な場合となることが超対称性から要請されることに注意しよう．さらに，弱い重力場$h_{\mu\nu}$はエネルギー運動量テンソル$T^{\mu\nu}$と相互作用をし，それは26.7節で見たように実ベクトル超場Θ^μの成分の線形結合なので，超場H_μ全体と物質との相互作用は，

$$I_{\rm int} = 2\kappa \int d^4x \left[H_\mu\,\Theta^\mu\right]_D \tag{31.1.15}$$

の形になると期待される．(26.7節のようにΘ^μを規格化すると係数2κの正しいことが，この節の最後で確かめられる.) 超カレントΘ^μは保存則

$$\gamma^\mu \mathcal{D}\Theta_\mu = \mathcal{D}\,X \tag{31.1.16}$$

を満たすことが26.7節で示されている．ここでXは実カイラル・スカラー超場(左カイラル・スカラー超場とその複素共役の和)であり，$\mathcal{D}$は4成分超微分(26.2.26)だ．この相互作用は，(31.1.14)の形をした変換の下で不変であり，Δ_μは，

$$\Delta_\mu = \left(\bar{\mathcal{D}}\gamma_\mu \Xi\right) \tag{31.1.17}$$

の形をしていることが分かる．ここで$\Xi(x,\theta)$は明白な超対称性条件

$$\left(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}\right)\left(\bar{\mathcal{D}}\Xi\right) = 0 \tag{31.1.18}$$

を満たす超場だ. 26.7節での X についてのカイラリティー条件から, この X は,

$$X = \left(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}\right)\Omega \tag{31.1.19}$$

という形に書けることが分かる. ここで Ω は一般に非局所的な超場だ. (31.1.16) から, このとき,

$$\int \left[\Theta^\mu\left(\bar{\mathcal{D}}\gamma_\mu\Xi\right)\right]_D = -\int\left[\left((\bar{\mathcal{D}}\Theta^\mu)\gamma_\mu\Xi\right)\right]_D = -\int\left[\left((\bar{\mathcal{D}}X)\Xi\right)\right]_D$$
$$= +\int\left[\Omega\left(\bar{\mathcal{D}}\mathcal{D}\right)\left(\bar{\mathcal{D}}\Xi\right)\right]_D = 0$$

が分かる. そこで, 相互作用 (31.1.15) は変換 $H_\mu \to H_\mu + (\bar{\mathcal{D}}\gamma_\mu\Xi)$ の下で不変だ. ((26.3.1) や (26.3.2) を満たす X のようなカイラル超場と, (26.3.45) を満たす $(\bar{\mathcal{D}}\Xi)$ のような線形超場との積として書ける D 項は, 時空微分であることが (26.2.25) により分かるが, このことに注意すると, X についての表現 (31.1.19) を使わずに, 同じ結果を得ることができる.)

この節の最後で (31.1.17) と (31.1.18) から, 超場 Δ_μ の成分についての条件

$$V^\Delta_{\mu\nu}(x) + V^\Delta_{\nu\mu}(x) = \frac{\partial v_\mu(x)}{\partial x_\nu} + \frac{\partial v_\nu(x)}{\partial x_\mu} - 2\,\eta_{\mu\nu}\frac{\partial v^\lambda(x)}{\partial x^\lambda}\ , \tag{31.1.20}$$

$$\lambda^\Delta_\mu(x) - \tfrac{1}{3}\,\gamma_\mu\gamma^\rho\lambda^\Delta_\rho(x) - \tfrac{1}{3}\,\gamma_\mu\partial^\rho\omega^\Delta_\rho(x) = \partial_\mu\chi(x)\ , \tag{31.1.21}$$

$$-\tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}\partial_\kappa V^\Delta_{\nu\mu}(x) = D^{\Delta\,\sigma}(x) + \partial^\sigma\partial^\rho C^\Delta_\rho(x)\ , \tag{31.1.22}$$

$$\partial^\mu M^\Delta_\mu(x) = \partial^\mu N^\Delta_\mu(x) = 0 \tag{31.1.23}$$

が得られることを見る. ここで $v_\mu(x)$ は実ベクトル場であり, $\chi(x)$ はマヨラナ・スピノル場だ. (ここで, この章全体を通して使う記法を導入する. つまり, (26.3.9) に従うと, 任意の超場 $S(x,\theta)$ の成分 C^S, ω^S, M^S, N^S, V^S_ν, λ^S, D^S は展開

$$S(x,\theta) = C^S(x) - i\left(\bar\theta\,\gamma_5\,\omega^S(x)\right) - \frac{i}{2}\left(\bar\theta\,\gamma_5\,\theta\right)M^S(x) - \frac{1}{2}\left(\bar\theta\,\theta\right)N^S(x)$$

$$+\frac{i}{2}\Big(\bar{\theta}\,\gamma_5\,\gamma^\nu\,\theta\Big)V^S_\nu(x) - i\Big(\bar{\theta}\,\gamma_5\,\theta\Big)\left(\bar{\theta}\Big[\lambda^S(x) + \frac{1}{2}\,\partial\!\!\!/\omega^S(x)\Big]\right)$$
$$-\frac{1}{4}\Big(\bar{\theta}\,\gamma_5\,\theta\Big)^2\left(D^S(x) + \frac{1}{2}\Box C^S(x)\right) \tag{31.1.24}$$

により定義される. また, $V^\Delta_{\mu\nu}(x)$ は Δ_μ の V_ν 成分だ.) これにより, 場

$$\phi_{\mu\nu}(x) \equiv V^H_{\mu\nu}(x) - \tfrac{1}{3}\,\eta_{\mu\nu}\,V^{H\,\lambda}{}_\lambda(x)\,, \tag{31.1.25}$$
$$\tfrac{1}{2}\,\psi_\mu(x) \equiv \lambda^H_\mu(x) - \tfrac{1}{3}\,\gamma_\mu\gamma^\rho\lambda^H_\rho(x) - \tfrac{1}{3}\,\gamma_\mu\partial^\rho\omega^H_\rho(x)\,, \tag{31.1.26}$$
$$b^\sigma(x) \equiv D^{H\,\sigma}(x) + \tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}\partial_\kappa V^H_{\nu\mu}(x) + \partial^\sigma\partial^\rho C^H_\rho(x) \tag{31.1.27}$$

を定義する. (31.3節で議論するように, (31.1.26)の左辺で導入した因子1/2は, 場 ψ_μ に通常の規格化を与える.) (31.1.20)と(31.1.21)から, 変換(31.1.14)は, $\phi_{\mu\nu}(x)$ と $\psi_\mu(x)$ にゲージ変換(31.1.9)と(31.1.13)を誘導することが分かる. ここで,

$$\xi_\mu = -\,2\kappa\,v_\mu\ ,\quad \omega_{\mu\nu} = \kappa\Big[-\frac{\partial v_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\mu} + V^\Delta_{\mu\nu} - V^\Delta_{\nu\mu}\Big]\,,\quad \psi = 2\chi \tag{31.1.28}$$

であり, 一方(31.1.22) から $b_\mu(x)$ が不変であることが示される. また, (31.1.23)から変換(31.1.14)は, 場

$$s \equiv \partial^\mu M^H_\mu(x)\,,\quad p \equiv \partial^\mu N^H_\mu(x) \tag{31.1.29}$$

を不変に保つ $M^H_\mu(x)$ と $N^H_\mu(x)$ の変化を誘導することが分かる. 最後に, $C^\Delta_\mu(x)$, $V^\Delta_{\mu\nu}(x) - V^\Delta_{\nu\mu}(x)$, $\omega^\Delta_\mu(x)$ は超対称性による拘束を受けないので, 変換(31.1.14)を使うと, 成分 $C^H_\mu(x)$, $V^H_{\mu\nu}(x) - V^H_{\nu\mu}(x) = \phi_{\mu\nu} - \phi_{\nu\mu}$, $\omega^H_\mu(x)$ を好きなように選ぶことができる. 特に, 27.1節で議論したゲージ超場についてのヴェス・ズミノ・ゲージとの類似で, $C^H_\mu(x)$, $V^H_{\mu\nu}(x) - V^H_{\nu\mu}(x) = \phi_{\mu\nu} - \phi_{\nu\mu}$, $\omega^H_\mu(x)$ の全てをゼロにとることができる. 場 $h_{\mu\nu}(x)$ と $\psi_\mu(x)$ は, その変換性から, それぞれ重力子とグラヴィ

ティーノ場に同定され, 一方 $b_\mu(x)$, $s(x)$, $p(x)$ は重力子超場と物質との結合を理解するのに重要な補助場[4] となる.

ついでに, 対称テンソル $h_{\mu\nu}$ の成分からゲージ変換 (31.1.12) の効果を差し引いて得られる独立な成分の数は, $10-4=6$ となることに注意しよう. 補助場 s, p, b_μ を加えると, これは合計 $6+6=12$ 個の独立な物理的ボゾン場を与える. 一方, マヨラナ・スピノル場 ψ_μ の成分からゲージ変換 (31.1.13) の効果を差し引いて得られる独立な物理的成分の数は $16-4=12$ だ. これは, 超対称性代数の表現をなす場の超対称多重項では, 独立なボゾン場の成分とフェルミオン場の成分の数は等しくなければならないという 26.2 節の終りで議論した条件を満たす.

さて, 物質と重力の相互作用に戻ろう. 一般に, 二つの超場 Θ^μ と H_μ の積として書ける D 項を積分すると, (26.2.25) により,

$$\int d^4x\,\Big[\Theta^\mu\,H_\mu\Big]_D = \int d^4x\,\Bigg[-\partial_\mu C^{H\,\sigma}\,\partial^\mu C^\Theta_\sigma + C^{H\,\sigma}\,D^\Theta_\sigma + D^{H\,\sigma}\,C^\Theta_\sigma$$
$$-\Big(\overline{\omega}^{H\,\sigma}\,[\lambda^\Theta_\sigma + \tfrac{1}{2}\ \not\partial\omega^\Theta_\sigma]\Big) - \Big([\overline{\lambda}^{H\,\sigma} + \tfrac{1}{2}\,\overline{\omega}^{H\,\sigma}\ \not\partial]\omega^\Theta_\sigma\Big)$$
$$+M^{H\,\sigma}\,M^\Theta_\sigma + N^{H\,\sigma}\,N^\Theta_\sigma - V^{H\,\kappa\sigma}\,V^\Theta_{\kappa\sigma}\Bigg] \qquad (31.1.30)$$

となる. (31.1.25)–(31.1.27) を使うと, $V^H_{\mu\nu}$, λ^H_μ, D^H_μ それぞれを $\phi_{\mu\nu}$, ψ_μ, b_μ を使って表現しても良く,

$$I_{\rm int} = 2\kappa\int d^4x\,\Big[\Theta^\mu\,H_\mu\Big]_D$$
$$= 2\kappa\int d^4x\,\Bigg[C^{H\,\sigma}\Big[\Box C^\Theta_\sigma - \partial_\sigma\partial^\rho C^\Theta_\rho + D^\Theta_\sigma\Big] + b^\sigma\,C^\Theta_\sigma$$
$$+\Big(\overline{\omega}^{H\,\sigma}\Big[-\lambda^\Theta_\sigma - \not\partial\omega^\Theta_\sigma + \partial_\sigma\gamma^\rho\omega^\Theta_\rho\Big]\Big) - \Big(\bar{\psi}^\sigma\,\omega^\Theta_\sigma\Big) + \Big(\bar{\psi}^\sigma\,\gamma_\sigma\gamma^\rho\omega^\Theta_\rho\Big)$$
$$+M^{H\sigma}M^\Theta_\sigma + N^{H\sigma}N^\Theta_\sigma$$

$$+\tfrac{1}{2}\,\epsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}\phi_{\nu\mu}\partial_\kappa C^\Theta_\sigma - \phi^{\lambda\sigma}\Big[V^\Theta_{\lambda\sigma} - \eta_{\lambda\sigma}V^{\Theta\,\rho}{}_\rho\Big]\Big] \tag{31.1.31}$$

が分かる．26.7節では，保存条件(31.1.16)が条件(26.7.44)，(26.7.39)，(26.7.35)を生成することを見た．つまり，

$$\begin{aligned} D^\Theta_\mu &= -\Box C^\Theta_\mu + \partial_\mu\partial^\nu C^\Theta_\nu\ , \\ \lambda^\Theta_\nu &= -\ \not\partial\omega^\Theta_\nu + \partial_\nu\gamma^\mu\omega^\Theta_\mu\ , \\ 0 &= V^\Theta_{\mu\nu} - V^\Theta_{\nu\mu} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\sigma C^{\Theta\,\rho} \end{aligned}$$

となり，それぞれから，(31.1.31)における$C^{H\sigma}$，$\overline{\omega}^{H\sigma}$の係数および$\phi^{\mu\nu}$の反対称部分の係数は全てゼロになることが分かる．また，超対称性カレント(26.7.20)とエネルギー運動量テンソル(26.7.42)，$\mathcal{R}$カレント(26.7.51)

$$\begin{aligned} S^\mu &= -2\omega^{\Theta\,\mu} + 2\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\omega^\Theta_\nu\ , \\ T_{\mu\nu} &= -\tfrac{1}{2}\,V^\Theta_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,V^\Theta_{\nu\mu} + \eta_{\mu\nu}V^{\Theta\,\lambda}{}_\lambda\ , \\ \mathcal{R}^\mu &= 2\,C^{\Theta\,\mu} \end{aligned}$$

と，

$$M^\Theta_\mu = \partial_\mu\mathcal{M}\ ,\quad N^\Theta_\mu = \partial_\mu\mathcal{N} \tag{31.1.32}$$

で定義される密度$\mathcal{M}$と$\mathcal{N}$を使って，(31.1.31)の残りの項を書いても良い．また，(26.7.33)と(26.7.34)から，

$$\mathcal{N} = -A^X\ ,\quad \mathcal{M} = B^X \tag{31.1.33}$$

と与えられる．ここでXは保存方程式(31.1.16)の右辺に現れる実カイラル超場だ．(この章では，超対称性カレントは「新」というラベルを持ったものと理解しよう.) 物質と計量超場の成分との1次の相互作用は，

$$2\kappa\int d^4x\,\Big[\Theta^\mu\,H_\mu\Big]_D = \kappa\int d^4x\,\Big[\mathcal{R}_\sigma b^\sigma + \tfrac{1}{2}\,\bar{S}^\sigma\psi_\sigma$$

$$-2\mathcal{M}\,s - 2\mathcal{N}\,p + T^{\kappa\sigma}h_{\sigma\kappa}\Big] \quad (31.1.34)$$

と書ける．重力場がエネルギー運動量テンソルと相互作用するのと全く同様に，グラヴィティーノ場は超対称性カレントと相互作用することに注意しよう．

我々は，この相互作用に現れる定数因子の正誤を確かめることができる．$T^{\mu\nu}$ の通常の定義は，計量を $\delta g_{\mu\nu}$ だけ変化させたときの物質についての作用の変化[5]

$$\delta I_M = \frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{\mathrm{Det}\,g}T^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$$

として与えられる．物質と (31.1.10) で与えられる弱い重力場の間の相互作用は，このとき，

$$\kappa\int d^4x\,T^{\mu\nu}(x)\,h_{\mu\nu}(x)$$

となり，(31.1.34) の $h_{\mu\nu}$ に依存する部分と一致する．こうして相互作用 (31.1.15) の規格化の正しさを確認することができる．

＊＊＊

(31.1.17) と (31.1.18) から，条件 (30.1.20)–(30.1.23) が得られることを確かめよう．超場 $\Upsilon \equiv \left(\bar{\mathcal{D}}\Xi\right)$ は成分，

$$\begin{aligned}
C^{\Upsilon} &= -i\mathrm{Tr}\,(\epsilon\omega^{\Xi})\,, \\
\omega^{\Upsilon} &= -i\gamma_5\,\partial\!\!\!/ C^{\Xi} + M^{\Xi} - i\gamma_5 N^{\Xi} + V\!\!\!/^{\Xi}\,, \\
M^{\Upsilon} &= -\mathrm{Tr}\,(\epsilon\gamma_5\lambda^{\Xi})\,, \\
N^{\Upsilon} &= i\mathrm{Tr}\,(\epsilon\lambda^{\Xi})\,, \\
V_{\nu}^{\Upsilon} &= -\mathrm{Tr}\,(\epsilon\gamma_5\lambda_{\nu}\lambda^{\Xi}) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\epsilon\gamma_5\,[\gamma_{\nu}\,,\,\partial\!\!\!/]\lambda^{\Xi})\,, \\
\lambda^{\Upsilon} &= -\,\partial\!\!\!/ M^{\Xi} - i\gamma_5\,\partial\!\!\!/ N^{\Xi} - i\gamma_5(D^{\Xi} + \Box C^{\Xi}) - \partial_{\nu}V^{\Xi\,\nu}\,, \\
D^{\Upsilon} &= i\mathrm{Tr}\,(\epsilon\,\partial\!\!\!/\lambda^{\Xi}) + i\mathrm{Tr}\,(\epsilon\Box\omega^{\Xi})
\end{aligned}$$

を持ち, 条件 (31.1.18) は,

$$M^{\Upsilon}=N^{\Upsilon}=D^{\Upsilon}+\Box C^{\Upsilon}=\partial^{\lambda}V^{\Upsilon}_{\lambda}=\lambda^{\Upsilon}+\not\partial\omega^{\Upsilon}=0$$

を生成する. M^{Υ} と N^{Υ} が消えることから, λ^{Ξ} は,

$$\lambda^{\Xi}\epsilon=f_{\mu}\gamma^{\mu}+g_{\mu}\gamma_5\gamma^{\mu}+k_{\mu\nu}\left[\gamma^{\mu}\,,\,\gamma^{\nu}\right] \tag{31.1.35}$$

の形の線形結合となることが分かる. このとき, $\partial^{\lambda}V^{\Upsilon}_{\lambda}$ と $D^{\Upsilon}+\Box C^{\Upsilon}$ がゼロとなることは,

$$\partial_{\mu}f^{\mu}=\partial_{\mu}g^{\mu}=0 \tag{31.1.36}$$

を意味する. また, $\lambda^{\Upsilon}+\not\partial\omega^{\Upsilon}$ がゼロとなることから,

$$D^{\Xi}=\frac{i}{2}\gamma_5\left[\gamma^{\nu}\,,\,\not\partial\right]V^{\Xi}_{\nu} \tag{31.1.37}$$

が従う. 成分 $\Delta_{\mu}(x,\theta)$ は,

$$C^{\Delta}_{\mu}=i\,\mathrm{Tr}\left(\epsilon\gamma_5\gamma_{\mu}\omega^{\Xi}\right)\,, \tag{31.1.38}$$

$$\omega^{\Delta}_{\mu}=i\,\not\partial\gamma_{\mu}C^{\Xi}+\gamma_5\gamma_{\mu}M^{\Xi}-i\gamma_{\mu}N^{\Xi}+\gamma_5\gamma^{\rho}\gamma_{\mu}V^{\Xi}_{\rho}\,, \tag{31.1.39}$$

$$M^{\Delta}_{\mu}=-\,\mathrm{Tr}\left(\epsilon\gamma_{\mu}\lambda^{\Xi}\right)\,, \tag{31.1.40}$$

$$N^{\Delta}_{\mu}=i\,\mathrm{Tr}\left(\epsilon\gamma_5\gamma_{\mu}\lambda^{\Xi}\right)\,, \tag{31.1.41}$$

$$V^{\Delta}_{\mu\nu}=\,\mathrm{Tr}\left(\epsilon\gamma_{\nu}\gamma_{\mu}\lambda^{\Xi}\right)-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\epsilon\left[\gamma_{\nu}\,,\,\not\partial\right]\gamma_{\mu}\,\omega^{\Xi}\right)\,, \tag{31.1.42}$$

$$\begin{aligned}\lambda^{\Delta}_{\mu}&=\gamma_5\,\not\partial\gamma_{\mu}M^{\Xi}+i\,\not\partial\gamma_{\mu}N^{\Xi}\\&\quad-i\gamma_{\mu}(D^{\Xi}+\Box C^{\Xi})+\gamma_5\gamma_{\mu}\partial^{\nu}V^{\Xi}_{\nu}\,,\end{aligned} \tag{31.1.43}$$

$$D^{\Delta}_{\mu}=i\,\mathrm{Tr}\left(\epsilon\,\not\partial\gamma_5\gamma_{\mu}\lambda^{\Xi}\right)+i\,\Box\,\mathrm{Tr}\left(\epsilon\gamma_5\gamma_{\mu}\omega^{\Xi}\right) \tag{31.1.44}$$

と書ける. (31.1.42) の対称部分は, 条件 (31.1.20) を与える. ここで,

$$v_{\mu}=-\,\mathrm{Tr}\left(\epsilon\gamma_{\mu}\omega^{\Xi}\right)+[\text{定数}] \tag{31.1.45}$$

となっている. (31.1.39) と (31.1.43) の線形結合から, 条件 (31.1.21) が生成され,

$$\chi=2\gamma_5M^{\Xi}+2i\,N^{\Xi}+[\text{定数}] \tag{31.1.46}$$

となっている．その後で (31.1.42) の反対称部分と (31.1.37), (31.1.38), そして恒等式

$$[\gamma_\nu\,,\,\gamma_\rho]\gamma_\mu - [\gamma_\mu\,,\,\gamma_\rho]\gamma_\nu = 2\eta_{\mu\rho}\gamma_\nu - 2\eta_{\nu\rho}\gamma_\mu + 2i\epsilon_{\nu\rho\mu\lambda}\,\gamma_5\gamma^\lambda\,,$$
$$\epsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}[\gamma_\nu\,,\,\gamma_\mu] = 2i\gamma_5[\gamma^\kappa\,,\,\gamma^\sigma]$$

を併せて使うと，条件 (31.1.22) を得る．最後に (31.1.40), (31.1.41) を (31.1.35), (31.1.36) と共に使うと，条件 (31.1.23) が得られる．

31.2 重力の作用

適切な重力の作用を見つけるために，一般化されたゲージ変換 $H_\mu \to H_\mu + \Delta_\mu$ の下で不変な超場を構成しなければならない．出発点として，(31.1.27) で定義される場 b_μ は，この変換の下で不変であることを思い出そう．超対称性変換を連続して行なうことにより，b_μ は「アインシュタイン超場」E_μ の C 成分であることが見てとれる．その成分は，

$$C^E_\mu = b_\mu\,, \tag{31.2.1}$$
$$\omega^E_\mu = \frac{3}{2}L_\mu - \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma^\nu L_\nu\,, \tag{31.2.2}$$
$$M^E_\mu = \partial_\mu s\,, \qquad N^E_\mu = \partial_\mu p\,, \tag{31.2.3}$$
$$V^E_{\mu\nu} = -\frac{3}{2}E_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}E^\rho{}_\rho + \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\mu\sigma\rho}\partial^\sigma b^\rho\,, \tag{31.2.4}$$
$$\lambda^E_\mu = \partial_\mu\gamma^\nu\omega^E_\nu - \not{\partial}\omega^E_\mu\,, \tag{31.2.5}$$
$$D^E_\mu = \partial_\mu\partial^\nu b_\nu - \Box b_\mu \tag{31.2.6}$$

であり，$E_{\mu\nu}$ は線形化したアインシュタイン・テンソル

$$E_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\partial_\nu h^\lambda{}_\lambda + \Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial^\lambda h_{\lambda\nu} - \partial_\nu\partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \eta_{\mu\nu}\Box h^\lambda{}_\lambda + \eta_{\mu\nu}\partial^\lambda\partial^\rho h_{\lambda\rho}\Big) \tag{31.2.7}$$

であって，

$$L^\nu \equiv i\,\epsilon^{\nu\mu\kappa\rho}\,\gamma_5\,\gamma_\mu\,\partial_\kappa\psi_\rho \tag{31.2.8}$$

は31.3節で示すように, スピン3/2を持つ質量ゼロの自由場に関する波動方程式の左辺を表している. 例えば, C^H, V^H_μ, D^H についての超対称性変換則(26.2.11), (26.2.15), (26.2.17)を(31.2.1), (31.1.27)に適用すると,

$$\delta C^{E\,\sigma} = i\left(\bar{\alpha}\gamma_5\,\left[\partial\!\!\!/\lambda^{H\,\sigma} - \tfrac{1}{2}\,i\,\epsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}\gamma_5\,\gamma_\mu\,\partial_\kappa\lambda^H_\nu + \partial^\sigma\partial^\kappa\omega^H_\kappa\right]\right)$$

が分かる. これと C^E についての変換則(26.2.11)を比較すると,

$$\omega^{E\,\sigma} = \partial\!\!\!/\lambda^{H\,\sigma} - \tfrac{1}{2}\,i\,\epsilon^{\nu\mu\kappa\sigma}\gamma_5\,\gamma_\mu\,\partial_\kappa\lambda^H_\nu + \partial^\sigma\partial^\kappa\omega^H_\kappa$$

が示される. (31.1.26)を使うと, λ^H_μ を ψ_μ と ω^H_μ で,

$$\lambda^H_\mu = \psi_\mu - \gamma_\mu\gamma^\rho\psi_\rho - \gamma_\mu\partial^\rho\omega^H_\rho$$

と表すことができ, ω^E_σ は,

$$\omega^E_\sigma = \partial\!\!\!/\,\psi_\sigma - \partial_\sigma\gamma^\rho\psi_\rho - \tfrac{1}{2}\,i\,\epsilon_{\nu\mu\kappa\sigma}\gamma_5\,\gamma^\mu\,\partial^\kappa\psi^\nu$$

のように ψ_σ だけで書けることが分かる. 恒等式

$$\eta_{\mu\nu}\gamma_\lambda - \eta_{\mu\lambda}\gamma_\nu = i\,\epsilon_{\mu\lambda\nu\rho}\gamma_5\gamma^\rho - \tfrac{1}{2}\,i\,\gamma_\mu\gamma^\sigma\,\epsilon_{\sigma\lambda\nu\rho}\gamma_5\gamma^\rho$$

を使うと, ω^E_μ について(31.2.2)が分かる. 同様に続けると, E_μ の成分についての他の表式(31.2.3)–(31.2.6)が与えられ, これらの成分は一つの実超場を成していることが明らかになる.

超対称性と拡張されたゲージ変換 $H_\mu \to H_\mu + \Delta_\mu$ の双方の下で不変な計量超場についての2次の作用を表すラグランジアン密度は,

$$\mathcal{L}_E = \tfrac{4}{3}\left(E_\mu H^\mu\right)_D = E_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,\bar{\psi}_\mu L^\mu - \tfrac{4}{3}\left(s^2 + p^2 - b_\mu b^\mu\right) \quad (31.2.9)$$

ととることにより構成できる. 因子4/3は, ラグランジアン内での重力子の運動項が, 慣例的な符合と規格化を持つように選んである. つ

まり, $\partial^\mu h_{\mu\nu}$, あるいは $h^\lambda{}_\lambda$ を含む項を除いて, これは $h_{\mu\nu}$ の成分についてのクライン・ゴルドン・ラグランジアンの和だ. グラヴィティーノの規格化は次の節で議論する.

(31.2.9) における最後の表式の最初の 2 項が, ゲージ変換 (31.1.12) と (31.1.13) の下で不変であるのを見るためには, $E_{\mu\nu}$ と L_μ がこれらの変換の下で明白に不変であり, 作用はこれらの項に現れる $h_{\mu\nu}$, あるいは ψ_μ の二つの因子について対称的であることに注意しよう. (31.2.9) に s, p, b_μ の微分が無いことから, これらは補助場だということが示される. 純粋に重力だけのときは, 場の方程式を使うと, これらは消えるが, 重力が物質に結合しているときはそうはならない.

物質と重力の結合をとりあげる前に, (31.1.5) と (31.1.10) における規格化定数 κ としてどんな値をとればよいか少し考えてみよう. 純粋な重力場についてのアインシュタイン・ヒルベルト作用は,

$$I_{GR} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{g}\,R \tag{31.2.10}$$

となり, G は重力のニュートン定数だ. $g(x)$ は計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ の行列式であり, $R(x)$ は $g_{\mu\nu}(x)$ から構成されるスカラー曲率だ. $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa h_{\mu\nu}$ と表される弱い重力場の場合に I_{GR} を計算するためには, 重力場[6] の任意の変分 $\delta g_{\mu\nu}(x)$ について,

$$\delta I_{GR} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\,\sqrt{g}\left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right]\delta g_{\mu\nu} \tag{31.2.11}$$

となることを思い出そう. ここで, $R^{\mu\nu}(x)$ は $g_{\mu\nu}(x)$ から計算されるリッチ・テンソルだ. $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa h_{\mu\nu}$ と書ける弱場の場合, リッチ・テンソル[7] は,

$$R^{\mu\nu} = \kappa\Big(\Box h^{\mu\nu} - \partial_\lambda\partial^\mu h^{\lambda\nu} - \partial_\lambda\partial^\nu h^{\lambda\mu} + \partial^\mu\partial^\nu h^\lambda{}_\lambda\Big) \tag{31.2.12}$$

となり, 弱場の場合,

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,g^{\mu\nu}R = 2\kappa E^{\mu\nu} \tag{31.2.13}$$

と書ける. したがって, (31.2.10) から,

$$\delta I_{GR} = \frac{\kappa^2}{4\pi G} \int d^4x\, E^{\mu\nu} \delta h_{\mu\nu}$$

となる. 一方で, $\int d^4x\, E_{\mu\nu}\, h^{\mu\nu}$ に現れる h の二つの添字についての対称性を考慮すると,

$$\delta \int d^4x\, E^{\mu\nu}\, h_{\mu\nu} = 2 \int d^4x\, E^{\mu\nu}\, \delta h_{\mu\nu}$$

が得られる. (31.2.9) における項 $E_{\mu\nu}\, h^{\mu\nu}$ が, 通常の重力のラグランジアン密度を与えるためには,

$$\kappa = \sqrt{8\pi G} \tag{31.2.14}$$

ととることが必要だ.

重力と物質の間の相互作用 (31.1.34) を持つアインシュタイン・ラグランジアン密度 (31.2.9) と, 物質場のラグランジアン $\mathcal{L}_M$ を組み合わせ, 全ラグランジアン密度

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{L}_M + E_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, \bar{\psi}_\mu L^\mu - \tfrac{4}{3}\, (s^2 + p^2 - b_\mu b^\mu) \\ + 2\kappa \Big[\tfrac{1}{2}\, \mathcal{R}_\sigma b^\sigma + \tfrac{1}{4}\, \bar{S}^\sigma \psi_\sigma - \mathcal{M}\, s - \mathcal{N}\, p + \tfrac{1}{2}\, T^{\kappa\sigma} h_{\sigma\kappa} \Big]\end{aligned} \tag{31.2.15}$$

を構成しよう. 補助場についての場の方程式から,

$$s = -6\kappa\mathcal{M}/8\,, \quad p = -6\kappa\mathcal{N}/8\,, \quad b_\mu = -6\kappa\mathcal{R}_\mu/16 \tag{31.2.16}$$

が得られる. 補助場を消去するために, これを使うと, ラグランジアン密度 (31.2.15) から,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \mathcal{L}_M + E_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, \bar{\psi}_\mu L^\mu + \tfrac{3}{4}\, \kappa^2 (\mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2 - \tfrac{1}{4}\, \mathcal{R}_\mu \mathcal{R}^\mu) \\ + \tfrac{1}{2}\, \kappa \bar{S}^\sigma \psi_\sigma + \kappa T^{\kappa\sigma} h_{\sigma\kappa}\end{aligned} \tag{31.2.17}$$

となる. 場 ψ_μ と $h_{\mu\nu}$ の源は大きさ κ であり, これらの場は κ 程度の大きさを持つと考えることができ, (31.2.17) での $\mathcal{L}_M$ 以外の項の大きさは κ^2 となる.

真空では, スカラー場 s と p のみが樹木近似で期待値をもつことができ, 真空に大きさ G のエネルギー密度を与える. つまり, 真空のエネルギー密度は,

$$\rho_{VAC} = -\mathcal{L}_{VAC} = -\mathcal{L}_{M\,VAC} - \tfrac{3}{4}\,\kappa^2(\mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2) \qquad (31.2.18)$$

と書ける. 真空のエネルギー密度の表式にある G について 1 次の項の負符合は, 超重力理論と通常の超対称性理論との間の特徴的な差異だ.

例えば, 超ポテンシャル $f(\Phi)$ を持つ 1 個の左カイラル超場 Φ の理論では, 0 次での真空のエネルギーは $-\mathcal{L}_{M\,VAC} = |df(\phi)/d\phi|^2$ となり, 一方 (31.1.33) と (26.7.27) から,

$$\mathcal{M} + i\mathcal{N} = -\frac{1}{3}\left[\phi\frac{df(\phi)}{d\phi} - 3\,f(\phi)\right]$$

となって, G について 1 次の大きさまで考えると, 真空の全エネルギーは,

$$\rho_{VAC} = \left|\frac{df(\phi)}{d\phi}\right|^2 - \frac{8\pi G}{3}\left|\phi\frac{df(\phi)}{d\phi} - 3\,f(\phi)\right|^2 \qquad (31.2.19)$$

と書ける. ここで ϕ は Φ のスカラー成分だ. エネルギー運動量テンソルが (26.7.42) で与えられる計量の場合は, この表式となり, 特に $T^\lambda{}_\lambda$ は $f = 0$ に対して消える. 計量の他の定義を使った場合, 真空のエネルギーは大きさ $8\pi G|\phi|^2|df(\phi)/d\phi|^2$ の項によって変化するだろう. しかし, この不定性は, 真空のエネルギーの最小値を計算する際には重要ではない. (31.2.19) を調べると, $f(\phi)$ がある点 ϕ_0 で停留する場合, $|\phi - \phi_0|$ と $|df/d\phi|$ について, ρ_{VAC} が G の 1 次で局所的な最小値を持ち, そのような点で真空のエネルギーは, G について 1 次で,

$$\rho_{VAC} = -24\pi G|f(\phi_0)|^2 \qquad (31.2.20)$$

となることが示される.

超重力理論で超対称性が破れていない場合, 真空状態が正のエネルギー密度を持つことができないのには代数的な理由が存在する. ゼロでない一様な真空のエネルギー密度ρ_Vについてのアインシュタインの場の方程式の解は, $\rho_V > 0$の場合, ドジッター空間の形をとり, $\rho_V < 0$の場合は反ドジッター空間の形をとる. これらの空間は, 5次元擬ユークリッド空間内での曲面

$$x_5^2 \pm \eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = R^2 \tag{31.2.21}$$

により記述され, 線素

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \pm dx_5^2 \tag{31.2.22}$$

を持つ. ここで上の符合はドジッター空間の場合であり, 下の符合は反ドジッター空間の場合だ. これらの空間の時空対称性はもはや, 並進とローレンツ変換からなるポアンカレ群ではなく, ドジッター空間の場合は$O(4,1)$であり, 反ドジッター空間の場合は$O(3,2)$だ. ここで$O(n,m)$は, 主対角部分にn個の正の要素とm個の負の要素を持つ対角型計量を不変に保つ線形変換のなす群だ. そこで, ドジッター空間や反ドジッター空間の真空状態を持ち, 超対称性が破れていない理論の場合, 超対称性は時空対称性として, それぞれ$O(4,1)$, あるいは$O(3,2)$といった単純群をもつ. ナーム[7a]は, 単純な時空対称性を持つ全ての超対称性を調べ上げた. 単純$O(3,2)$超対称性のみならずN重拡張$O(3,2)$超対称性もあるが, $O(4,1)$の場合は$N=2$超対称性しか存在しない. ここでは$N=1$超重力理論を考えており, したがって, この理論に$O(3,2)$時空対称性を与えるような破れていない超対称性を持ち, さらに$\rho_V < 0$を満たす超対称的な真空状態が存在する. しかし, $O(4,1)$時空対称性を与えるような破れていない超対称性を持ち, $\rho_V > 0$を満たす超対称的な真空状態は存在しない.

負のエネルギー密度を持つ真空場の配位が可能なことから, 我々の

宇宙の安定性が一見すると脅かされるように見える．一般に $f(\phi)$ はいくつかの停留点を持ち，それらの点で $f(\phi)$ は異なった値をとる．観測される我々の宇宙がほとんど平坦な空間であることを説明するために，$f(\phi)$ におけるパラメータを細かく調整し，$f(\phi)$ がこれらの停留点の一つで消えるようにしたとしても，$f(\phi)$ がゼロでない値をとる他の停留点ではより低い真空のエネルギーが生成され，負のエネルギー密度を持つ状態への崩壊確率を上昇させる．このとき，計量は平坦な場合のものではなく，むしろ「反ドジッター空間」の形でなければならないだろう．

反ドジッター空間の泡をつくり出す際に表面張力へと変換される正のエネルギーを埋め合わせるのに，値(31.2.20)は好運にもわずかに不足している．そこで通常の平坦な空間からの遷移は，実際にはエネルギー的に起こらない．

コールマン・デルチア[8]は，一般相対論の方程式を，エネルギー密度ゼロの平坦な空間内にある，負の内部エネルギー密度 $-\epsilon$ と正の表面張力 S を持つ泡に適用し，重力的な特異性を含んでいないそのような泡は，

$$\epsilon \leq 6\pi G S^2 \tag{31.2.23}$$

のとき，正のエネルギーを持つことを示した．表面張力は，泡の表面積あたりのエネルギーなので，G について0次では，泡の壁を通過するエネルギー密度の積分

$$S_1 = \int_{r_-}^{r_+} dr \left[\left| \frac{d\phi}{dr} \right|^2 + \left| \frac{df(\phi)}{d\phi} \right|^2 \right] \tag{31.2.24}$$

で与えられる．ここで r_- と r_+ は，泡の壁の少し内側と少し外側で測った半径だ．これは，

$$S_1 = \int_{r_-}^{r_+} dr \; \left[\left| \frac{d\phi}{dr} + \xi \left(\frac{df(\phi)}{d\phi} \right)^* \right|^2 - 2\mathrm{Re} \left(\xi^* \frac{d\phi}{dr} \frac{df(\phi)}{d\phi} \right) \right]$$

と書き直すことができ, ξ は $|\xi| = 1$ を満たす任意の位相因子だ. 第2項の積分は自明だ. つまり, $\phi(r_+)$ は $f(\phi)$ が停留しゼロとなる値を表しており, 一方 $\phi(r_-)$ は $f(\phi)$ が停留するけれどゼロではないある値 ϕ_0 を表していると仮定しているので, 積分は,

$$\int_{r_-}^{r_+} dr\, \frac{d\phi}{dr}\frac{df(\phi)}{d\phi} = -f(\phi_0)$$

となる. この項を最大にするために $\xi = f(\phi_0)/|f(\phi_0)|$ ととり不等式[9]

$$S_1 \geq 2\,|f(\phi_0)| \tag{31.2.25}$$

を得る. 等号が成立するのは (通常のように), 適切な境界条件を持つ, 微分方程式 $d\phi/dr = -\xi(df/d\phi)^*$ の解が存在するときに限る. 不等式 (31.2.23) は, このようにして内部エネルギー密度が $-24\pi G|f(\phi_0)|^2$ より小さくないときに満たされ, この値は正確に (31.2.20) となる. この計算によると, 平坦な空間が輻射補正により不安定化する可能性が残されたままだが, 読者は心配する必要はない. というのは真空のエネルギーがゼロとなる真空場の配位を持つ超重力理論では, 場の擾乱が有限の領域に限られているとき, 場の擾乱のエネルギーは正であることが証明されているからだ[10].

* * *

(26.7.48) から, 左カイラル・スカラー超場 Φ_n の組についてのエネルギー運動量テンソルは, 項

$$\Delta T^{\mu\nu} = \frac{1}{3}\Big(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu\Big)\sum_n |\phi_n|^2 \tag{31.2.26}$$

を含むことが示される. 部分積分すると, 対応する相互作用 $\kappa h_{\mu\nu}\Delta T^{\mu\nu}$ は作用に,

$$\frac{\kappa}{3}\int \delta^4 x \sum_n |\phi_n|^2 \Big(\eta^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu\Big)h_{\mu\nu} = \frac{1}{6}R^{(1)}\sum_n |\phi_n|^2 \tag{31.2.27}$$

の形で寄与する．ここで $R^{(1)}$ は線形近似でのスカラー曲率だ．この項は, 通常のアインシュタイン・ヒルベルト作用 $-\sqrt{g}R/2\kappa^2$ (これは (31.2.17) において項 $E_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ として現れる) に付け加わり, この効果によって, $R^{(1)}$ の係数が,

$$-\frac{1}{2\kappa^2}+\frac{1}{6}\sum_n|\phi_n|^2=-\frac{1}{2\kappa^2}\left(1-\frac{\kappa^2}{3}\sum_n|\phi_n|^2\right) \tag{31.2.28}$$

で置き換わる．重力の通常の定数を回復するために, 計量に**ワイル変換**を行なって, 4 脚場 ${e^a}_\mu$ を,

$${\tilde{e}^a}_{\ \mu}={e^a}_\mu\sqrt{1-\frac{\kappa^2}{3}\sum_n|\phi_n|^2} \tag{31.2.29}$$

で置き換える．つまり, 計量 $g_{\mu\nu}$ を,

$$\tilde{g}_{\mu\nu}=\left(1-\frac{\kappa^2}{3}\sum_n|\phi_n|^2\right)g_{\mu\nu} \tag{31.2.30}$$

で, あるいは弱場に対して,

$$\tilde{h}_{\mu\nu}=h_{\mu\nu}-\frac{\kappa}{6}\sum_n|\phi_n|^2\,\eta_{\mu\nu} \tag{31.2.31}$$

で置き換える．弱場の場合, 新しい計量についてのアインシュタイン・テンソル (31.2.7) は,

$$\begin{aligned}\tilde{E}_{\mu\nu}\equiv&\frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\partial_\nu{\tilde{h}^\lambda}_{\ \lambda}+\Box\tilde{h}_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial^\lambda\tilde{h}_{\lambda\nu}-\partial_\nu\partial^\lambda\tilde{h}_{\lambda\mu}\\&-\eta_{\mu\nu}\Box{\tilde{h}^\lambda}_{\ \lambda}+\eta_{\mu\nu}\partial^\lambda\partial^\rho\tilde{h}_{\lambda\rho}\Big)\\=&E_{\mu\nu}-\frac{\kappa}{6}\Big(\partial_\mu\partial_\nu-\eta_{\mu\nu}\Box\Big)\sum_n|\phi_n|^2\end{aligned} \tag{31.2.32}$$

と書ける．元々の作用におけるアインシュタイン項と項 (31.2.27) の和は, このとき,

$$\int d^4x\left[h_{\mu\nu}E^{\mu\nu}+\frac{\kappa}{3}\sum_n|\phi_n|^2\Big(\eta^{\mu\nu}\Box-\partial^\mu\partial^\nu\Big)h_{\mu\nu}\right]=\int d^4x\left[\tilde{h}_{\mu\nu}\tilde{E}^{\mu\nu}\right.$$

$$+\frac{\kappa^2}{12}\left(\partial_\mu \sum_n |\phi_n|^2\right)\left(\partial^\mu \sum_n |\phi_n|^2\right)\Bigg] \tag{31.2.33}$$

となり, 有効重力定数は今の場合, 実際に定数だ. 計量のこの再定義は, またポテンシャルの変化をもたらす. 元々のラグランジアン密度は項 $-e\sum_n |\partial f(\phi)/\partial\phi_n|^2$ を含んでおり, 新しい4脚場を用いると,

$$-e\sum_n |\partial f(\phi)/\partial\phi_n|^2 = -\tilde{e}\sum_n |\partial f(\phi)/\partial\phi_n|^2 - \frac{2\kappa^2}{3}\left(\sum_n |\phi_n|^2\right)\sum_n |\partial f(\phi)/\partial\phi_n|^2$$

と書ける. したがって, 計量の新しい定義を用いると, ポテンシャル (31.2.19) は,

$$\rho_{VAC} = \sum_n \left|\frac{\partial f(\phi)}{\partial\phi_n}\right|^2 - \frac{\kappa^2}{3}\left|\sum_n \phi_n \frac{\partial f(\phi)}{\partial\phi_n} - 3\,f(\phi)\right|^2 + \frac{2\kappa^2}{3}\left(\sum_n |\phi_n|^2\right)\sum_n \left|\frac{\partial f(\phi)}{\partial\phi_n}\right|^2 \tag{31.2.34}$$

で置き換わる. 大きさ κ^2 までで考える限り, 新しい項によって, 停留点での ρ_{VAC} の値は変化しない. そこで真空の安定性についての以前の議論になんら変更は必要ない.

31.3 グラヴィティーノ

この節ではグラヴィティーノのいくつかの特性を導くために, 31.1節–31.3節で発展させた弱場の形式を使う. 特に, $G \to 0$での連続性の議論を使うことによって, 超対称性が自発的に破れたときのグラヴィティーノの質量表式を得る. これは, Gについては1次まで妥当で, 他の相互作用については全ての次数で妥当な表式だ. (この表式の元々の導出は31.6節で与えられる.)

まず, (31.2.9) における項 $-\frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu L^\mu$ は, スピン 3/2 で質量ゼロの自己荷電共役な粒子の正しい自由場ラグランジアンだということを示す必要がある. スピンを持つ粒子の自由場の正しいラグランジアンを構成する由緒あるアプローチは, ラグランジアンを推測し, それが物理的に満足な場の方程式とプロパゲーターを与えるかを確かめることだ. スピン 3/2 の粒子の場合, この方法はある不定性をもたらす. 例えば, 超対称性についての論文で通常ラリタ・シュウィンガー・ラグランジアンと呼ばれているものは, 元々, ラリタとシュウィンガーが提唱したラグランジアン[11] ではない. ここでは, 6.2 節の方針に基づくアプローチに従おう. つまり, 質量がゼロでないスピン 3/2 の粒子のローレンツ不変性を要請し, まずプロパゲーターを導き, それを逆に使ってラグランジアンを見つけるというものだ. ここでは簡単のために, 質量がゼロでないグラヴィティーノを扱う. なぜなら実際の世界では超対称性の破れを考慮しなければならないが, 超対称性カレントが保存するのでプロパゲーターにおける質量ゼロの特異性は重要ではなくなることに注意すると, このようにして得られた結果を質量ゼロのグラヴィティーノの場合に適用できるからだ.

余分なベクトルの添字を 1 個持つスピノル場 ψ^μ は, 斉次ローレンツ群の $[(\frac{1}{2},0)+(0,\frac{1}{2})]\times(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 表現に属している. 自由場の $(1,\frac{1}{2})+(\frac{1}{2},1)$ 部分を取り出すために, 既約条件

$$\gamma_\mu\psi^\mu = 0 \tag{31.3.1}$$

を課す. 運動量 $\mathbf{q}=0$ を持ち, スピンの z 成分が s であるスピン 3/2 の質量がゼロでない粒子と, 真空との間で, この場の行列要素を評価すると, その要素は回転不変性と (31.3.1) から, 条件

$$\langle 0|\psi^0(0)|s\rangle = 0 \tag{31.3.2}$$

かつ,

$$\sum_{s=-3/2}^{3/2} \langle 0|\psi^i(0)|s\rangle \langle 0|\psi^j(0)|s\rangle^* \propto \delta_{ij} - \tfrac{1}{3}\,\gamma_i\gamma_j \tag{31.3.3}$$

を満たすことが分かる. ここで比例係数は, 回転不変な行列 $\beta \equiv i\gamma^0$ に依存している. 通常のディラックの慣例 $\beta\langle 0|\psi^i(0)|s\rangle = \langle 0|\psi^i(0)|s\rangle$ (場の空間反転性が簡単になるようにとる) と, $\beta = +1$ となる規格化の慣例的な選択をすると, (5.5.23) と (31.3.3) に類似の成分は,

$$\sum_{s=-3/2}^{3/2} \langle 0|\psi^i(0)|s\rangle\langle 0|\psi^j(0)|s\rangle^* = (2\pi)^{-3}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)\left[\delta_{ij} - \tfrac{1}{3}\,\gamma_i\gamma_j\right] \tag{31.3.4}$$

と書かれる. 質量 m_g, スピン 3/2 の粒子の運動量空間でのプロパゲーターは,

$$\Delta^{\mu\nu}(q) = \frac{P^{\mu\nu}(q)}{q^2 + m_g^2 - i\epsilon} \tag{31.3.5}$$

の形をとることが分かる. ここで $P^{\mu\nu}(q)$ は 4 元ベクトル q のローレンツ共変な多項式であり, $\mathbf{q} = 0$ と $q^0 = m_g$ の場合, この $P^{\mu\nu}(q)$ は,

$$P^{ij} = \left(\frac{1+\beta}{2}\right)\left[\delta_{ij} - \tfrac{1}{3}\,\gamma_i\gamma_j\right], \qquad P^{i0} = P^{0i} = P^{00} = 0 \tag{31.3.6}$$

となる. 質量殻上でゼロとなることができる項を除き, (したがって, その効果は直接的なカレント・カレント相互作用と同じになり) この極限を持つ唯一の共変関数は,

$$\begin{aligned}P^{\mu\nu}(q) = &\left(\eta^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{m_g^2}\right)\left(-i\not{q} + m_g\right)\\ &-\frac{1}{3}\left(\gamma^\mu - i\frac{q^\mu}{m_g}\right)\left(i\not{q} + m_g\right)\left(\gamma^\nu - i\frac{q^\nu}{m_g}\right)\end{aligned} \tag{31.3.7}$$

と書ける. (極限 (31.3.6) を持つ他の共変関数と (31.3.7) との間の差は, $\mathbf{q} = 0$ かつ $q^0 = m_g$ のとき, つまり質量殻上の全ての場所で, その成分

が全てゼロとなる共変関数として表される.）自由場のラグランジアン密度は, このとき,

$$\mathcal{L}_0 = -\tfrac{1}{2}\left(\bar{\psi}^\mu\, D_{\mu\nu}(-i\partial)\,\psi^\nu\right) \tag{31.3.8}$$

の形をしている. ここで, $D_{\mu\nu}$ は,

$$\Delta^{\mu\nu}(q)\, D_{\nu\lambda}(q) = \delta^\mu_\lambda \tag{31.3.9}$$

を満たす. 煩雑な, しかし直接的な計算により,

$$D_{\nu\lambda}(q) = -\epsilon_{\nu\mu\kappa\lambda}\,\gamma_5\,\gamma^\mu\, q_\kappa\, -\tfrac{1}{2}\, m_g\,[\gamma_\nu\,,\,\gamma_\lambda] \tag{31.3.10}$$

となるので, ラグランジアン密度 (31.3.8) は,

$$\mathcal{L}_0 = -\tfrac{1}{2}\, i\,\epsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}\left(\bar{\psi}_\nu\,\gamma_5\,\gamma_\mu\,\partial_\kappa\,\psi_\lambda\right) + \tfrac{1}{4}\, m_g\left(\bar{\psi}_\nu\,[\gamma^\nu\,,\,\gamma^\lambda]\,\psi_\lambda\right) \tag{31.3.11}$$

となる. この結果から, $m_g = 0$ の場合, (31.2.9) における項 $-\frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu L^\mu$ は, スピン 3/2 を持ち質量がゼロの自己荷電共役な粒子の慣例的な規格化がされている正しい自由場のラグランジアンになることが分かる. $m_g \to 0$ の極限で, (31.3.5) と (31.3.7) で与えられるプロパゲーターは特異性をもつが, (これはちょうど5.9節で示したように, ヘリシティー $\pm 3/2$ の質量ゼロの粒子に対する生成消滅演算子から, 場 $(1, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}, 1)$ を構成するのが不可能であることを反映している), (31.3.7) で表される $P^{\mu\nu}(q)$ 内の項で, $m_g \to 0$ に伴って発散する項は全て, q^μ あるいは q^ν に比例しているので ψ_μ と相互作用するカレントが保存するとき, これらの項は何の寄与も与えない.

一風変わった質量項を含むラグランジアン密度 (31.3.11) の妥当性の更なるチェックとして, このラグランジアン密度から, 場の方程式

$$-i\,\epsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}\,\gamma_5\,\gamma_\mu\,\partial_\kappa\,\psi_\lambda + \tfrac{1}{2}\, m_g\,[\gamma^\nu\,,\,\gamma^\lambda]\,\psi_\lambda = 0 \tag{31.3.12}$$

が得られることに注意する. この方程式の発散を取ると, 結果として,

$$[\not{\partial}\,,\,\gamma^\lambda]\,\psi_\lambda = 0$$

が得られる．また, (31.3.12) と γ_ν を縮約すると,

$$\gamma_\nu \psi^\nu \propto \epsilon^{\nu\mu\kappa\lambda}\gamma_5\,\gamma_\nu\gamma_\mu\,\partial_\kappa\,\psi_\lambda \propto [\not\partial\,,\,\gamma^\lambda]\,\psi_\lambda = 0$$

が示され, 既約条件 (31.3.1) は, (相互作用を考慮すると必ずしも満たされないが) 自由場の場合満たされる．これら二つの結果から, 別の既約条件

$$\partial_\lambda \psi^\lambda = \tfrac{1}{2}\,\{\not\partial\,,\,\gamma_\lambda\}\,\psi^\lambda = \tfrac{1}{2}\,[\not\partial\,,\,\gamma_\lambda]\,\psi^\lambda = 0$$

が得られる．これらの既約性の結果を使うと, 場の方程式 (31.3.12) をディラック方程式の形

$$\left(\not\partial + m_g\right)\psi^\lambda = 0 \tag{31.3.13}$$

に書くことができる．とりわけ, この方程式は, 質量 m_g を持つ 1 個の粒子の自由場を表している．

超重力理論における超対称性の自発的破れの効果を考えよう．破れた大域的対称性の場合は, スピン 1/2 の質量ゼロの粒子, つまりゴールドスティーノが存在するが, 超重力理論ではゴールドスティーノ場 χ は, ゲージ変換 $\psi_\mu \to \psi_\mu - \partial_\mu\chi$ により消去することができる．ゴールドスティーノ場が消去されるようにゲージは固定されるので, ゲージ不変性からは, もはやグラヴィティーノの質量はゼロに保たれず, 質量 (今後は m_g と書くことにする) を獲得する．これは 21.3 節でみたように, 電弱相互作用のゲージ対称性 $SU(2)\times U(1)$ が自発的に破れたときに, ベクトルボゾン $W^\pm$ と Z^0 が質量を得るのと全く同じだ．

28 章の始めに述べたように, もし超対称性が到達可能な現象と関連しているならば, 超対称性が破れる特徴的なエネルギーのスケールはプランク質量よりずっと小さくなければならない．この場合, 連続性の議論を使って, グラヴィティーノ質量 m_g についての普遍的な表式を与えてもよい．(31.1.34) によると, グラヴィティーノ場 ψ_μ は超対称性カレント S^μ と結合し, 結合定数 $\frac{1}{2}\kappa = \frac{1}{2}\sqrt{8\pi G}$ を持つ．そこで, 遷移

$A+B \to C+D$において, 4 元運動量qを持つ仮想グラヴィティーノが交換され, 不変振幅に項

$$M(A+B \to C+D) = \tfrac{1}{4}\,(8\pi G)\,\langle C|\bar{S}_\mu|A\rangle_N\,\Delta^{\mu\nu}(q)\,\langle D|S_\nu|B\rangle_N \tag{31.3.14}$$

の寄与を及ぼす. ここで下付き添字Nは, ゴールドスティーノ 1 粒子に関連する$q^2=0$での極を超対称性カレントの行列要素から取り除くことを表している. プランク質量に比べて超対称性の破れのスケールが十分に小さいときは, グラヴィティーノ質量よりはずっと大きいがプランク質量よりはずっと小さい運動量遷移の領域が存在する. そのような運動量のときは, プロパゲーターの分子(31.3.7)における項$1/m_g^2$が, 行列要素において以下のような主要な寄与を持つ.

$$M(A+B \to C+D) \to \tfrac{1}{4}\,(8\pi G)\,\langle C|\bar{S}_\mu|A\rangle_N \left(\frac{-2i\,\not{q}\,q^\mu q^\nu}{3m_g^2 q^2}\right) \langle D|S_\nu|B\rangle_N\,. \tag{31.3.15}$$

しかし, 十分大きなプランク質量の場合, グラヴィティーノの結合は無視できるようになり, 行列要素は, グラヴィティーノの無い理論でのゴールドスティーノ交換によって生成されるのものと同じでなければならない. (29.2.10) によると, これは,

$$M(A+B \to C+D) \to \langle C|\bar{S}_\mu|A\rangle_N \left(\frac{-iq}{q^2}\right) \left(\frac{q^\mu q^\nu}{F^2}\right) \langle D|S_\nu|B\rangle_N \tag{31.3.16}$$

となる. ここでFは超対称性の破れの強さを特徴付ける(ここでは実にとってある) パラメータであり, 真空のエネルギー密度が$F^2/2$となるように定義されている. (31.3.15) と (31.3.16) が一致するためには, グラヴィティーノの質量は, 値

$$m_g = \sqrt{\frac{4\pi\,G\,F^2}{3}} \tag{31.3.17}$$

をとらなければならない. この表式はGF^2の最低次のみで妥当なも

のであるが, 超対称性の自発的破れに関係する非重力的な相互作用については全次数で(非摂動論的にも)妥当なものだ.

m_g を, スピン・ゼロの重力的な補助場の期待値 $\langle s \rangle$ と $\langle p \rangle$ で表すことは, いくつかの目的のために便利だ. 真空状態が時空曲率ゼロを持つためには, 重力子の負の真空エネルギーや隠れたセクターにおける場との相互作用により, 物質場の真空のエネルギー密度 $F^2/2$ がバランスしなければならないことに注意しよう. このエネルギーは (31.2.18) と (31.2.16) により, $\langle s \rangle$ と $\langle p \rangle$ を使って, $-(4/3)(\langle s \rangle^2 + \langle p \rangle^2)$ と書ける. そこで,

$$F^2/2 = (4/3)(\langle s \rangle^2 + \langle p \rangle^2) \tag{31.3.18}$$

となる. したがって, (31.3.17) は,

$$m_g = \frac{2\kappa}{3}\sqrt{\langle s \rangle^2 + \langle p \rangle^2} \tag{31.3.19}$$

という形に書ける. 場合によっては,

$$\tilde{m}_g \equiv \frac{2\kappa}{3}\Big(\langle s \rangle + i\langle p \rangle\Big) \tag{31.3.20}$$

で定義される複素グラヴィティーノの質量を導入するのが便利だ. その絶対値は, 物理的なグラヴィティーノの質量 (31.3.19) を表す.

31.4 アノマリーを媒介とする超対称性の破れ

標準模型の $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ 量子数を持たない超場のある種の隠れたセクターにおいて, 超対称性が破れ, これが観測される粒子には重力的に伝えられる可能性を 28.3 節で見た. この節では, 最小超対称標準模型において, $\kappa \equiv \sqrt{8\pi G}$ について 1 次で超対称性が破れる場合の効果を扱う. この理論は, ラグランジアン密度 (28.4.1) におけるゲージーノの質量や, パラメータ A_{ij} と B を含んでいる. スクォークやスレプトンの質量の 2 乗といった超対称性の破れの効果は, κ につい

て 2 次であり, 31.7節でとり上げる. そこでは, 31.6節で議論する一般の超重力の形式を使って, 重力を媒介とする超対称性の破れを考える.

相互作用 (31.1.34) における重力的な超対称多重項の成分場をそれらの期待値で単に置き換えることにより, 重力を媒介とする超対称性の破れの効果を, κ について 1 次の大きさで見つけることができる. 物質超場の隠れたセクターでの超対称性の自発的破れにより, ゼロでない真空期待値を獲得する唯一の成分場は, スピンを持たない補助場 s と p だ. そこで (31.1.33) を使うと, 超対称性の破れを表す 1 次の相互作用

$$\mathcal{L}^{(1)} = 2\kappa\left[-A^X\langle p\rangle + B^X\langle s\rangle\right] = 3\,\mathrm{Im}\left[\tilde{m}_g^*\left(A^X + iB^X\right)\right] \tag{31.4.1}$$

が得られる. ここで $\tilde{m}_g$ は, 複素グラヴィティーノの質量 (31.3.20) であり, A^X と B^X は, 26.7節で議論したスケール不変でない実カイラル超場の A 成分と B 成分を表している.

26.7節で示したように, 左カイラル超場 Φ_n の超ポテンシャル $f(\Phi)$ を持つくりこみ可能な理論では, X 超場は,

$$X = \frac{2}{3}\,\mathrm{Im}\left[\sum_n \Phi_n \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi_n} - 3\,f(\Phi)\right] \tag{31.4.2}$$

で与えられる. 超ポテンシャルの結合定数パラメータを, 次元を持たないパラメータや質量の次元を持つパラメータ $\mathcal{M}$ を使って書くことにより, もっと一般の理論にすぐに拡張できる形にこれを書くことができる. 超ポテンシャルは (質量)^3 の次元を持つので,

$$\mathcal{M}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial \mathcal{M}} + \sum_n \Phi_n \frac{\partial f(\Phi)}{\partial \Phi_n} = 3\,f(\Phi) \tag{31.4.3}$$

が得られる. そこで (31.4.2) は,

$$X = \frac{2}{3}\,\mathrm{Im}\left[\mathcal{M}\frac{\partial f(\Phi)}{\partial \mathcal{M}}\right] \tag{31.4.4}$$

と書いてもよい．この表式は一般化できて，ラグランジアンにおけるあらゆる種類の$\mathcal{F}$項のスケール依存性がXに寄与することを表す．(31.4.4)の明らかな一般化

$$X = \frac{2}{3}\mathrm{Im}\left[\mathcal{M}\frac{\partial f(\Phi, W)}{\partial \mathcal{M}}\right] \tag{31.4.5}$$

により与えられるXに，ラグランジアンにおける項$2\mathrm{Re}\,[f(\Phi, W)]_{\mathcal{F}}$は寄与する．(ラグランジアンの$D$項の質量スケール依存性もまた，$X$へ寄与する．) (31.4.5)と(26.3.10), (26.3.13) を比較すると，

$$A^X + iB^X = \frac{2\mathcal{M}}{3i}\frac{\partial}{\partial \mathcal{M}}\Big[f(\Phi, W)\Big]_{\theta=0} = \frac{2\mathcal{M}}{3i}\frac{\partial f(\phi, \lambda_L)}{\partial \mathcal{M}} \tag{31.4.6}$$

が分かる．このとき，有効ラグランジアンには，(31.4.1)と(31.4.6)で与えられる，κについて1次の大きさを持つ超対称性の破れの項

$$\mathcal{L}_f^{(1)} = -\,2\,\mathrm{Re}\left[\tilde{m}_g^*\,\frac{\mathcal{M}\,\partial f(\phi, \lambda_L)}{\partial \mathcal{M}}\right] \tag{31.4.7}$$

が存在する．

(31.4.7)は，ラグランジアンにおける明白なスケール依存性を持つ項のみでなく，くりこみ群により記述される結合定数のスケール依存性に対しても適用される[11a]．このスケール依存性は，エネルギー運動量テンソルのトレースやRカレントの発散にゼロでない値を与える量子力学的アノマリーから現れる．そこで，このようにして現れる観測可能な超対称性の破れの効果は**アノマリー媒介**と呼ばれている．

特に(27.3.22)と(27.3.23)で与えられるくりこみ可能な超対称ゲージ理論の運動項$\mathcal{L}_{ゲージ}$

$$\mathcal{L}_{ゲージ} = -\frac{1}{2g^2}\mathrm{Re}\sum_{A\alpha\beta}\left[\epsilon_{\alpha\beta}W_{A\alpha}W_{A\beta}\right]_{\mathcal{F}} \tag{31.4.8}$$

を考えよう．この項は，質量のスケールに明白には依存していないが，結合定数gは，よく知られたように，くりこみ群方程式

$$\mathcal{M}\frac{dg(\mathcal{M})}{d\mathcal{M}} = \beta\Big(g(\mathcal{M})\Big) \tag{31.4.9}$$

により，くりこみのスケール $\mathcal{M}$ に依存している．このとき，(31.4.7) を使うと，ゲージ・ラグランジアン (31.4.8) から，ラグランジアンにおける超対称性の破れの項

$$\mathcal{L}^{(1)}_{ゲージ} = -\frac{\beta(g)}{g^3}\mathrm{Re}\left[\tilde{m}_g^* \sum_{A\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta}\lambda_{AL\alpha}\lambda_{AL\beta}\right] \tag{31.4.10}$$

が得られることが示される．ここで $\lambda_{AL\alpha}$ はゲージーノ場の左巻き部分であり，$W_{A\alpha}$ のように，ゲージ結合定数 g を掛けることにより，g がクォーク超場とゲージ超場の相互作用や構造定数に現れないように規格化されている．この規格化の慣例を考慮すると，ゲージーノの質量は，g^2 に $\frac{1}{2}\sum_{A\alpha\beta}\epsilon_{\alpha\beta}\lambda_{AL\alpha}\lambda_{AL\beta}$ の係数の絶対値を掛けたもの，すなわち，

$$m_{ゲージーノ} = m_g \left|\frac{\beta(g)}{g}\right| \tag{31.4.11}$$

に等しくなる．この表式において，$m_{ゲージーノ}$ と g は，ラグランジアン内にある切断に依存する裸のパラメータであり，ウィルソン流のくりこみ群方程式により統制されている．$\beta(g)$ は純粋に 1 ループのダイアグラムから，b を定数として $\beta(g) = bg^3$ という形で現れることを 27.6 節で見た．したがって，

$$m_{ゲージーノ} = m_g\,|b|\,g^2 \tag{31.4.12}$$

となる．ゲージーノの物理的質量は，g の高次の補正により (31.4.12) とは異なっている．しかし，ゲージーノは量子色力学の特徴的なスケールよりずっと重くなければならないことを知っているので，これらの補正はウィーノやビーノのみならずグルーイーノについても小さい．

超対称性から，グルーオンやクォーク超場の場合，明白にスケール依存性を持つ項はラグランジアン内には許されない．そこで，電弱相互作用を無視すると，(31.4.12) はグルーイーノ質量へ大きさ κ の唯一の寄

与を与える．3 世代のクォークについて, (28.2.10) から $b = -3g_s^3/16\pi^2$ が得られる．$g_s^2/4\pi = 0.118$ と取ると, (31.4.12) はグルーイーノの質量

$$m_{グルーイーノ} = \frac{3g_s^2 m_g}{16\pi^2} = 2.8 \times 10^{-2}\, m_g \tag{31.4.13}$$

を与える．一方で, ヒッグス超場についてのラグランジアンには, スケールに依存する相互作用が存在し, (28.1.7) の μ 項 $-\mu(H_2^{\rm T} e H_1)$ により生成される．そこで, (31.4.7) により与えられるラグランジアンには, $2{\rm Re}\,[\tilde{m}_g^* \mu(\mathcal{H}_2^{\rm T} e \mathcal{H}_1)]$ のような項が存在する．(28.4.1) の $B\mu$ 項と比較すると,

$$B = -\tilde{m}_g^* \tag{31.4.14}$$

が得られることが分かる．

クォーク超場とレプトン超場が 3 世代あり, 1 対のヒッグス 2 重項超場 H_1, H_2 がある場合は, (28.2.8) と (28.2.9) から $U(1)$ ゲージ結合定数 g' について $b = 11/16\pi^2$ を, また $SU(2)$ ゲージ結合定数 g について $b = 1/16\pi^2$ を与える．$g'^2/4\pi = 0.0102$ および $g^2/4\pi = 0.0338$ ととると, (31.4.11) は, ビーノとウィーノそれぞれについて $8.9 \times 10^{-3} m_g$ と $2.7 \times 10^{-3} m_g$ の質量を与える．しかし, ビーノとウィーノの質量はまた, それぞれ大きさ $g'^2 m_g/16\pi^2$ と $g^2 m_g/16\pi^2$ の寄与を受ける．これはビーノあるいはウィーノがヒッグス・ヒッグシーノのループにくっついているダイアグラムから来る寄与であり, ラグランジアン密度における項 $2{\rm Re}\,[\tilde{m}_g^* \mu(\mathcal{H}_2^{\rm T} e \mathcal{H}_1)]$ によって超対称性の破れが導入される．これはビーノとウィーノの質量[11b]

$$m_{ビーノ} = \frac{g'^2 m_g}{16\pi^2} \left| 11 - f\left(\frac{\mu^2}{m_A^2}\right) \right| , \tag{31.4.15}$$

$$m_{ウィーノ} = \frac{g^2 m_g}{16\pi^2} \left| 1 - f\left(\frac{\mu^2}{m_A^2}\right) \right| \tag{31.4.16}$$

を与える．ここで, m_A は (28.5.21) と,

$$f(x) \equiv \frac{2x \ln x}{x-1} \tag{31.4.17}$$

によって定義される擬スカラー粒子の質量だ. この結果が意味することを31.7節で更に調べる.

最後に, 任意の左カイラル超場Φ_rの運動項を表すラグランジアン密度$[\Phi_r^* e^{-V}\Phi_r]_D$には, スケール依存性を持つ場のくりこみ因子$Z_r$が掛かる. Φ_rに因子$Z_r^{1/2}$を吸収することにより, 運動項を表すD項から超ポテンシャル$\mathcal{F}$項に因子Z_rを移動させることができる. このとき, 3 次線形な超ポテンシャル項$\sum_{rst} h_{rst}\Phi_r\Phi_s\Phi_t$における((28.1.7)における$h_{ij}^E$, h_{ij}^D, h_{ij}^Uのような) 湯川結合定数h_{rst}には, 切断$\mathcal{M}$に依存する因子$Z_r^{-1/2}Z_s^{-1/2}Z_t^{-1/2}$が掛かる. (31.4.7) によると, 相互作用$\mathcal{L}^{(1)}$は, ラグランジアン密度

$$\mathcal{L}^{(1)}_{\text{湯川}} = -2\sum_{rst}\gamma_{rst}\mathrm{Re}\left[\tilde{m}_g^* h_{rst}\phi_r\phi_s\phi_t\right] \tag{31.4.18}$$

に寄与する. ここで,

$$\begin{aligned}\gamma_{rst} &\equiv \mathcal{M}\frac{\partial \ln h_{rst}(\mathcal{M})}{\partial \mathcal{M}} \\ &= -\frac{1}{2}\mathcal{M}\frac{\partial \ln Z_r(\mathcal{M})}{\partial \mathcal{M}} - \frac{1}{2}\mathcal{M}\frac{\partial \ln Z_s(\mathcal{M})}{\partial \mathcal{M}} \\ &\quad -\frac{1}{2}\mathcal{M}\frac{\partial \ln Z_t(\mathcal{M})}{\partial \mathcal{M}}\end{aligned} \tag{31.4.19}$$

と定義されている. (28.1.7) における係数A_{ij}^E, A_{ij}^D, A_{ij}^U [11b] は,

$$A_{ij}^N = \tilde{m}_g^*\gamma_{ij}^N = \tilde{m}_g^*\mathcal{M}\frac{\partial \ln h_{ij}^N}{\partial \mathcal{M}} \tag{31.4.20}$$

で与えられ, $N = E, D, U$を表している. これにより, A_{ij}^DとA_{ij}^Uは大きさ $g_s^2 m_g/8\pi^2$となり, 一方A_{ij}^Eは大きさ$g^2 m_g/8\pi^2$あるいは$g'^2 m_g/8\pi^2$となる.

31.5 局所超対称性変換

超対称性変換則におけるGの高次の効果を考える前の最後のステップとして, 重力子超場H_μと他の超場の物理的成分に関する変換則の議

論を, G について最低次の場合に完結させよう.

まず, 「ヴェス・ズミノ」ゲージ

$$C_\mu^H = \omega_\mu^H = V_{\mu\nu}^H - V_{\nu\mu}^H = 0 \tag{31.5.1}$$

の場合, 物理的場 $h_{\mu\nu}$, ψ_μ, b_μ, s, p で表したときにこれらの変換則がとる形に注意しよう. 物理的場を (31.1.25)–(31.1.27), (31.1.29), (31.1.11) で超場 H_μ の成分と同定して, 一般の変換則 (26.2.11)–(26.2.17) と「ゲージ」条件 (31.5.1) とを併せて使うと, 変換則

$$\delta h_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\left(\bar\alpha\left[\gamma_\mu\psi_\nu + \gamma_\nu\psi_\mu\right]\right), \tag{31.5.2}$$

$$\delta\psi_\mu = \Big[\tfrac{1}{2}\left[\gamma^\nu\,,\,\gamma^\lambda\right]\partial_\lambda h_{\mu\nu} + \partial_\mu h^\lambda{}_\lambda + 2\,i\,\gamma_5\, b_\mu - \tfrac{2}{3}\,i\,\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_5\, b^\rho$$
$$+\tfrac{2}{3}\,\gamma_\mu\, s - \tfrac{2}{3}\;i\,\gamma_\mu\gamma_5\, p\Big]\alpha\,, \tag{31.5.3}$$

$$\delta s = \tfrac{1}{4}\left(\bar\alpha\,\gamma_\lambda\, L^\lambda\right), \tag{31.5.4}$$

$$\delta p = -\tfrac{1}{4}\,i\left(\bar\alpha\,\gamma_5\gamma_\lambda\, L^\lambda\right), \tag{31.5.5}$$

$$\delta b_\mu = \tfrac{3}{4}\,i\left(\bar\alpha\,\gamma_5\, L_\mu\right) - \tfrac{1}{4}\,i\left(\bar\alpha\,\gamma_5\gamma_\mu\gamma^\nu L_\nu\right) \tag{31.5.6}$$

が得られる. ここで L_μ は (31.2.8) により,

$$L^\mu \equiv i\,\epsilon^{\mu\nu\kappa\rho}\,\gamma_5\,\gamma_\nu\,\partial_\kappa\psi_\rho$$

で与えられる. この変換は, 成分 C_μ^H, ω_μ^H, $V_{\mu\nu}^H - V_{\nu\mu}^H$ をゼロから,

$$\delta C_\mu^H = 0\,,\quad \delta\omega_\mu^H = V_{\mu\nu}^H\gamma^\nu\alpha\,, \tag{31.5.7}$$

$$\delta[V_{\nu\mu}^H - V_{\mu\nu}^H] = \left(\bar\alpha\left[\gamma_\mu\lambda_\nu^H - \gamma_\nu\lambda_\mu^H\right]\right) \tag{31.5.8}$$

だけずらす. 適切なゲージ変換 $H_\mu \to H_\mu + \Delta_\mu$ を行なって, (31.5.1) を満たすゲージに戻ることができる. ここで, Δ_μ は (31.1.17), (31.1.18) の形の超場であり, 成分

$$C_\mu^\Delta = 0\,,\quad \omega_\mu^\Delta = -\,V_{\mu\nu}^H\gamma^\nu\alpha\,, \tag{31.5.9}$$

$$V_{\nu\mu}^\Delta - V_{\mu\nu}^\Delta = \left(\bar\alpha\left[\gamma_\nu\lambda_\mu^H - \gamma_\mu\lambda_\nu^H\right]\right) \tag{31.5.10}$$

を持つ．いままでは, α を微小な定数マヨラナ・スピノルとしたときの大域的超対称性変換の場合について考えていた．少なくとも最低次では, この対称性は, $\alpha(x)$ が x^μ に依存する局所的な超対称性変換に容易に拡張できる．(26.7.11) により, そのような変換の下では, 物質の作用は, 変化

$$\delta \int d^4x\, \mathcal{L}_M = -\int d^4x\, \left(\bar{S}^\mu(x)\, \partial_\mu \alpha(x)\right) \tag{31.5.11}$$

を受ける．(31.2.17) を調べることにより, 作用におけるこの変化は, 非斉次項 $(2/\kappa)\partial_\mu\alpha(x)$ を (31.5.3) の右辺に付け加えると打ち消されることが分かる．そこでグラヴィティーノ場の変化は,

$$\begin{aligned}\delta\psi_\mu(x) = (2/\kappa)\partial_\mu\alpha(x) + \Big[\tfrac{1}{2}\,[\gamma^\nu\,,\,\gamma^\lambda]\,\partial_\lambda h_{\mu\nu}(x) + \partial_\mu h^\lambda{}_\lambda(x) + 2\,i\,\gamma_5\, b_\mu(x)\\ -\tfrac{2}{3}\; i\,\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_5\, b^\rho(x) + \tfrac{2}{3}\;\gamma_\mu\, s(x) - \tfrac{2}{3}\; i\,\gamma_\mu\gamma_5\, p(x)\Big]\alpha(x)\end{aligned} \tag{31.5.12}$$

となる．

一般座標変換への一般化が明確になるような形で (31.5.12) を書き直すことは有用だ．まず, (31.5.12) の右辺における項 $\partial_\mu h^\lambda{}_\lambda \alpha$ は, パラメータ $\alpha(x)$ を,

$$\tilde{\alpha} \equiv (\mathrm{Det}\, g)^{1/4}\alpha \simeq \alpha + \tfrac{1}{2}\;\kappa h^\lambda{}_\lambda \alpha \tag{31.5.13}$$

で置き換えることにより, 消去されることに注意する．ティルダを省略すると, κ の 0 次で (31.5.12) は,

$$\begin{aligned}\delta\psi_\mu(x) = (2/\kappa)\partial_\mu\alpha(x) + \Big[\tfrac{1}{2}\,[\gamma^\nu\,,\,\gamma^\lambda]\,\partial_\lambda h_{\mu\nu}(x) + 2\,i\,\gamma_5\, b_\mu(x)\\ -\tfrac{2}{3}\; i\,\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_5\, b^\rho(x) + \tfrac{2}{3}\;\gamma_\mu\, s(x) - \tfrac{2}{3}\; i\,\gamma_\mu\gamma_5\, p(x)\Big]\alpha(x)\end{aligned} \tag{31.5.14}$$

となる．これは $\alpha(x)$ の共変微分で表すことができ, 一般座標では,

$$D_\mu\alpha(x) = \partial_\mu\alpha(x) + \tfrac{1}{2}\; i\mathcal{J}_{bc}\,\omega_\mu^{bc}(x)\,\alpha(x) \tag{31.5.15}$$

の形となる．ここで$\mathcal{J}_{bc}$は，ローレンツ変換の生成子

$$\mathcal{J}^{bc} \equiv -\frac{i}{4}\left[\gamma^b\,,\,\gamma^c\right] \tag{31.5.16}$$

を表すディラック表現での行列(5.4.6) であり，$\omega_\mu^{bc}(x)$はスピン接続

$$\omega_\mu^{bc} = e^b{}_\lambda\, e^c{}_{\nu;\mu}\, g^{\lambda\nu} = e^b{}_\lambda\, \frac{e^c{}_\nu}{\partial x^\mu}\, g^{\lambda\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\mu}\, e^b{}_\lambda\, e^c{}_\rho\, g^{\lambda\nu} \tag{31.5.17}$$

だ．弱場近似(31.1.5), (31.1.10), (31.1.11)とゲージ条件$\phi_{\mu\nu} = \phi_{\nu\mu}$を併せて使い，この近似で局所ローレンツ添字$a$, b等と時空の添字μ, ν等の差異を再び無視すると，これにより，

$$D_\mu\alpha(x) \simeq \partial_\mu\alpha(x) + \tfrac{1}{4}\,\kappa\,[\gamma^\nu\,,\,\gamma^\lambda]\,\partial_\lambda h_{\mu\nu}(x) \tag{31.5.18}$$

となる．こうして，局所超対称性変換則(31.5.12)は，

$$\begin{aligned}\delta\psi_\mu(x) = (2/\kappa)D_\mu\alpha(x) + \Big[&2\,i\,\gamma_5\,b_\mu(x) - \tfrac{2}{3}\,i\,\gamma_\mu\gamma_\rho\gamma_5\,b^\rho(x)\\ &+\tfrac{2}{3}\,\gamma_\mu\,s(x) - \tfrac{2}{3}\,i\,\gamma_\mu\gamma_5\,p(x)\Big]\alpha(x)\end{aligned} \tag{31.5.19}$$

と書かれる．ヴェス・ズミノ・ゲージでは，超対称性変換での微分は共変微分になることが分かる．この意味で，ここで概略を述べたアプローチは，27.8節で述べたドウィット・フリードマンの超対称性ゲージ理論へのアプローチと類似している．

変換$\psi_\mu(x) \to \psi_\mu(x) + (2/\kappa)\partial_\mu\alpha(x)$ は(31.1.13)と同じ型のゲージ変換であり，0次のグラヴィティーノ作用$-\frac{1}{2}\int d^4x(\bar{\psi}_\mu\, L^\mu)$を不変に保つ．したがって，ラグランジアン密度(31.2.15)から得られる全作用は，κについて0次の大きさまで考える限り，局所超対称性変換(31.5.2), (31.5.4)–(31.5.6), (31.5.12)(あるいは(31.5.19))や(26.7.15)のような物質超場変換の下で不変だ．重力と超対称性を組み合わせると，自動的に局所超対称性が導かれることが結論される．

31.6 全ての次数での超重力

ラグランジアン密度(31.2.15)から導かれる作用は, $\kappa \equiv \sqrt{8\pi G}$ の 0 次までで考える限り, 26.7 節と 31.5 節で構成された局所超対称性変換の下で不変であるが, κ の 1 次では不変ではない. なぜなら, 重力超対称多重項と物質との相互作用は, $\partial_\mu S^\mu$ に大きさ κ の項を導入するからだ. 全作用の不変性を実現するためには, 重力超対称多重項と物質の双方の成分に関する超対称性変換とラグランジアンに, κ の高次の項を付け加えなければならない. 局所ローレンツ変換, 一般座標変換と組み合わせたときに, これらの変換が閉じた代数をなすように, κ の高次の項をまず変換則に付け加え, その後, これら全ての変換の下で作用が不変になるように, 元の作用に項を付け加えることによって全作用を不変にできる.

これは長く煩雑な過程だ. ここでは結果[12]のみを与え, 次の章でそれらの最も重要な応用について考えよう. 4 脚場, グラヴィティーノ場, 補助場についての局所超対称性変換は,

$$\delta e^a{}_\mu = \kappa\left(\bar\alpha\,\gamma^a\psi_\mu\right), \tag{31.6.1}$$

$$\delta\psi_\mu = (2/\kappa)D_\mu\alpha + 2\,i\,\gamma_5\,(b_\mu - \tfrac{1}{3}\,\gamma_\mu\gamma_\rho b^\rho)\,\alpha + \tfrac{2}{3}\,\gamma_\mu(s - i\gamma_5 p)\,\alpha\,, \tag{31.6.2}$$

$$\delta s = \frac{1}{4e}\left(\bar\alpha\,\gamma_\mu L^\mu\right) + \frac{\kappa}{2}\Big(\bar\alpha\,[i\gamma_5\,b^\nu - s\,\gamma^\nu - i\,p\,\gamma_5\gamma^\nu]\psi_\nu\Big)\,, \tag{31.6.3}$$

$$\delta p = -\frac{i}{4e}\left(\bar\alpha\,\gamma_5\gamma_\mu L^\mu\right) + \frac{\kappa}{2}\Big(\bar\alpha\,[\,b^\nu + i\,s\,\gamma_5\gamma^\nu - p\,\gamma^\nu]\psi_\nu\Big)\,, \tag{31.6.4}$$

$$\delta b_\mu = \frac{3i}{4e}\Big(\bar\alpha\gamma_5\,(L_\mu - \tfrac{1}{3}\,\gamma_\mu\gamma_\rho\,L^\rho)\Big) + \frac{\kappa}{2}\,b_\nu\Big(\bar\alpha\,\gamma^\nu\psi_\mu\Big) + i\,\frac{\kappa}{2}\Big(\bar\psi_\mu\gamma_5(s - i\gamma_5 p)\,\alpha\Big)$$

$$-i\,\frac{\kappa}{4}\epsilon_{\mu\nu\kappa\sigma}b^\nu\left(\bar{\alpha}\,\gamma_5\gamma^\kappa\psi^\sigma\right) \tag{31.6.5}$$

の形となる．ここでD_μは再び(31.5.15)と(31.5.16)で与えられる共変微分

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + \tfrac{1}{8}\left[\gamma_a\,,\,\gamma_b\right]\omega_\mu^{ab} \tag{31.6.6}$$

だ．ただし，スピン接続は以下のようにグラヴィティーノ場について双線形の項を含む．

$$\omega_\mu^{ab} = e^a{}_\lambda e^b{}_{\nu\,;\,\mu}\,g^{\lambda\nu} + \frac{\kappa^2}{4}\Big[e^b{}_\nu\left(\bar{\psi}_\mu\gamma^a\psi^\nu\right) + e^a{}_\nu e^b{}_\rho\left(\bar{\psi}^\nu\gamma_\mu\psi^\rho\right) - e^a{}_\nu\left(\bar{\psi}_\mu\gamma^b\psi^\nu\right)\Big]\,. \tag{31.6.7}$$

また，L^μはラリタ・シュウィンガー演算子(31.2.8)の共変版

$$L^\mu = i\,\gamma_5\gamma_\nu D_\rho\psi_\sigma\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{31.6.8}$$

だ．γ_μは通常のディラック行列γ_aを使って，

$$\gamma_\mu = e^a{}_\mu\,\gamma_a \tag{31.6.9}$$

と定義されており，eはここでは4脚場の行列式

$$e \equiv \sqrt{\mathrm{Det}\,g} \tag{31.6.10}$$

を表している．これらの変換則は弱場の極限で，(31.5.2), (31.5.19), (31.5.4)–(31.5.6)になるのを見ることは容易だ．

これらの変換の下で不変であり，弱場の極限で(31.2.9)の形になる純超重力についての作用は，

$$I_{\mathrm{SUGRA}} = \int d^4x\,\left[-\frac{e}{2\kappa^2}R - \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}_\mu\,L^\mu\right) - \frac{4e}{3}\left(s^2+p^2-b_\mu b^\mu\right)\right] \tag{31.6.11}$$

と書ける．ここでRはスカラー曲率であり，スピン接続(31.6.7)を使って計算される．物質の無いときは，作用は$s=p=b_\mu=0$で停留し，よ

り単純な作用

$$I_{\rm SUGRA} = \int d^4x \left[-\frac{e}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_\mu \, L^\mu \right) \right]$$

となる. また, 物質場の変換はもっと複雑だ. 一般のスカラー超対称多重項の成分について, 変換は,

$$\delta C = i \left(\bar{\alpha} \, \gamma_5 \, \omega \right) , \tag{31.6.12}$$

$$\delta \omega = [-i \gamma_5 \, \not{\mathcal{D}} C - M + i \gamma_5 N + \not{V}] \, \alpha \, , \tag{31.6.13}$$

$$\delta M = - \left(\bar{\alpha} \, [\lambda + \not{\mathcal{D}} \omega] \right) + \frac{2\kappa}{3} \left(\bar{\alpha} \, [s - i \, \gamma_5 p \right.$$
$$\left. + i \, \gamma_5 \, \not{b}] \, \omega \right) , \tag{31.6.14}$$

$$\delta N = i \left(\bar{\alpha} \, \gamma_5 \, [\lambda + \not{\mathcal{D}} \omega] \right)$$
$$+ \frac{2 \, i \, \kappa}{3} \left(\bar{\alpha} \, [s - i \, \gamma_5 p + i \, \gamma_5 \, \not{b}] \, \gamma_5 \, \omega \right) , \tag{31.6.15}$$

$$\delta V_a = \left(\bar{\alpha} \gamma_a \lambda \right) + \left(\bar{\alpha} \mathcal{D}_a \omega \right)$$
$$+ \frac{\kappa}{3} \left(\bar{\alpha} \, [s - i \, \gamma_5 p + i \, \gamma_5 \, \not{b}] \, \gamma_a \, \omega \right) , \tag{31.6.16}$$

$$\delta \lambda = -\frac{1}{4} [\gamma^a \, , \, \gamma^b] \, \alpha \, F_{ab} + i \, D \, \gamma_5 \, \alpha \, , \tag{31.6.17}$$

$$\delta D = i \left(\bar{\alpha} \, \gamma_5 \, \not{\mathcal{D}} \lambda \right) \tag{31.6.18}$$

となる. ここで共変微分は,

$$\mathcal{D}_a C = e_a{}^\mu \left[\partial_\mu C - \frac{i \, \kappa}{2} \left(\bar{\psi}_\mu \, \gamma_5 \, \omega \right) \right] , \tag{31.6.19}$$

$$\mathcal{D}_a \omega = e_a{}^\mu \left[\partial_\mu \omega + \frac{1}{8} \omega_\mu^{cb} \, [\gamma_c \, , \, \gamma_b] \, \omega - i \, \kappa \, b_\mu \, \gamma_5 \, \omega \right.$$
$$\left. - \frac{\kappa}{2} \left(\not{V} - i \, \gamma_5 \, \not{\partial} C - M + i \gamma_5 N \right) \psi_\mu \right] , \tag{31.6.20}$$

$$\mathcal{D}_a \lambda = e_a{}^\mu \left[\partial_\mu \lambda + \frac{1}{8} \omega_\mu^{cb} [\gamma_c \, , \, \gamma_b] \, \lambda + i \, \kappa \, b_\mu \, \gamma_5 \, \lambda \right.$$
$$\left. + \frac{\kappa}{8} [\gamma_b \, , \, \gamma_c] \, \psi_\mu F_{bc} - \frac{i \kappa}{2} \gamma_5 D \, \psi_\mu \right] , \tag{31.6.21}$$

$$F_{ab} = e_a{}^\mu e_b{}^\nu \left[\partial_\mu V_\nu + \frac{\kappa}{2}\partial_\mu \left(\bar{\psi}_\nu\, \omega\right) \right.$$
$$\left. -\frac{\kappa}{2}\left(\bar{\psi}_\mu\, \gamma_\nu\, \lambda\right)\right] - [a \leftrightarrow b] \tag{31.6.22}$$

であり, $V_\mu \equiv e^a{}_\mu V_a$ と定義されている. 一般のスカラー多重項の積の演算則は, ∂_μ が全ての場所で $\mathcal{D}_a$ に置き換わるのを除き, (26.2.19)–(26.2.25) と同じものだ. そこで超対称多重項 $S = S_1 S_2$ の成分は,

$$C = C_1 C_2\ , \tag{31.6.23}$$

$$\omega = C_1\omega_2 + C_2\omega_1\ , \tag{31.6.24}$$

$$M = C_1 M_2 + C_2 M_1 + \tfrac{1}{2}\, i\left(\overline{\omega_1}\,\gamma_5\,\omega_2\right)\ , \tag{31.6.25}$$

$$N = C_1 N_2 + C_2 N_1 - \tfrac{1}{2}\ \left(\overline{\omega_1}\,\omega_2\right)\ , \tag{31.6.26}$$

$$V^a = C_1 V_2^a + C_2 V_1^a - \tfrac{1}{2}\, i\left(\overline{\omega_1}\,\gamma_5\gamma^a\omega_2\right)\ , \tag{31.6.27}$$

$$\lambda = C_1\lambda_2 + C_2\lambda_1 - \tfrac{1}{2}\ \gamma^a\omega_1\mathcal{D}_a C_2 - \tfrac{1}{2}\ \gamma^a\omega_2\mathcal{D}_a C_1 + \tfrac{1}{2}\ i\ \not{V}_1\gamma_5\,\omega_2$$
$$+\tfrac{1}{2}\ i\ \not{V}_2\gamma_5\,\omega_1 + \tfrac{1}{2}\ (N_1 - i\gamma_5 M_1)\,\omega_2$$
$$+\tfrac{1}{2}\ (N_2 - i\gamma_5 M_2)\,\omega_1\ , \tag{31.6.28}$$

$$D = -\mathcal{D}_a C_1\,\mathcal{D}^a C_2 + C_1 D_2 + C_2 D_1 + M_1 M_2 + N_1 N_2$$
$$-\left(\overline{\omega_1}\,[\lambda_2 + \tfrac{1}{2}\ \not{\mathcal{D}}\omega_2]\right)$$
$$-\left(\overline{\omega_2}\,[\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\ \not{\mathcal{D}}\omega_1]\right) - V_{1a}V_2^a \tag{31.6.29}$$

となる.

平坦な空間の場合と全く同様に, これら一般の超対称多重項に課すことができる超対称性拘束条件が存在する. そのような拘束条件の一つは実条件となる. (31.6.12)–(31.6.22) と (26.A.20)–(26.A.21) とを併せて考えると, C, M, N, V_a, D, ω, λ が一つの超対称多重項 S を形成するとき, C^*, M^*,N^*, V_a^*,D^*, $\beta\epsilon\gamma_5\omega^*$, $\beta\epsilon\gamma_5\lambda^*$ はまた, S^* と呼ばれる一つの超対称多重項の成分となることが示される. 特に, 実超対称多重項は $S = S^*$ を満たす超対称多重項であり, C, M, N, V_a, D は実で

ωとλはマヨラナ・スピノルとなる.

また, カイラリティーについての超対称性条件を課すことができる. ある場Zを使って,

$$\lambda = 0\,,\quad D = 0\,,\quad V_\nu + \tfrac{1}{2}\,\kappa\left(\bar{\psi}_\nu\,\omega\right) = \partial_\nu Z \tag{31.6.30}$$

と置いてみる. すると(31.6.22)から$F_{ab} = 0$となり, よって(31.6.17)から$\delta\lambda = 0$となることが示され, 一方で(31.6.21)から $\mathcal{D}_a\lambda = 0$ であることが示され, よって(31.6.18)から$\delta D = 0$が分かる. したがって, 条件$\lambda = D = 0$は局所超対称性変換によって保存される. もう少し計算すると,

$$\delta\left[V_\nu + \tfrac{1}{2}\,\kappa\left(\bar{\psi}_\nu\,\omega\right)\right] = \partial_\nu\left(\bar{\alpha}\,\omega\right) \tag{31.6.31}$$

を示すことができる. そこで$V_\nu + \frac{1}{2}\kappa\left(\bar{\psi}_\nu\,\omega\right)$が時空の勾配(グラディエント)であるという残りの条件もまた, 超対称的だ. (31.6.30)を満たす成分場のなす超対称多重項は**カイラル**だと言われる. 大域的超対称性の場合と全く同様に, カイラル超対称多重項の成分は慣例的に,

$$C = A\,,\quad \omega = -i\gamma_5\psi\,,\quad M = G\,,\quad N = -F\,,\quad Z = B \tag{31.6.32}$$

によって定義されるA, B, ψ, F, Gという名前に付け変えられる. A, B, F, Gが実であり, ψがマヨラナ・スピノルのときはカイラル超対称多重項は実となる. そのような実カイラル超対称多重項は左カイラル超対称多重項Φの和として書くことができ, その成分は慣例的に,

$$\phi \equiv \frac{A + iB}{\sqrt{2}}\,,\quad \psi_L \equiv \left(\frac{1+\gamma_5}{2}\right)\psi\,,\quad \mathcal{F} \equiv \frac{F - iG}{\sqrt{2}} \tag{31.6.33}$$

と, その複素共役である右カイラル超対称多重項により定義される. これらの定義と(31.6.12)–(31.6.15), (31.6.31)から左カイラル超対称多重項の成分は変換則

$$\delta\phi = \sqrt{2}\left(\bar{\alpha}\,\psi_L\right)\,, \tag{31.6.34}$$

$$\delta\psi_L = \sqrt{2}(\partial\!\!\!/\phi)\alpha_R - \kappa\gamma^\mu\left(\bar{\psi}_\mu\psi_L\right)\alpha_R + \sqrt{2}\mathcal{F}\,\alpha_L\ , \quad (31.6.35)$$

$$\delta\mathcal{F} = \sqrt{2}\left(\bar{\alpha}\,\mathcal{D}\!\!\!\!/\,\psi_L\right) - \frac{2\kappa}{3}\left(\bar{\alpha}\,[s - ip - i\,b\!\!\!/]\psi_L\right) \quad (31.6.36)$$

を持つことが分かる．ここで$\mathcal{D}_a\psi$は (31.6.20) と (31.6.32) で与えられる．左カイラル超対称多重項の積の演算則は，大域的超対称性の場合の対応する法則 (26.3.27)–(26.3.29) と同じになる．つまり，左カイラル超対称多重項Φ_1とΦ_2の積は$\Phi_1\Phi_2$と書かれる左カイラル超対称多重項となり，その成分は，

$$\phi = \phi_1\phi_2\ , \quad (31.6.37)$$

$$\psi_L = \phi_1\psi_{2L} + \phi_2\psi_{1L}\ , \quad (31.6.38)$$

$$\mathcal{F} = \phi_1\mathcal{F}_2 + \phi_2\mathcal{F}_1 - \left(\psi_{1L}^{\mathrm{T}}\,\epsilon\,\psi_{2L}\right) \quad (31.6.39)$$

で与えられる．

次に，一般座標変換と局所ローレンツ変換のみならず，局所超対称性変換の下で不変な作用をどのように構成するのかを考えなければならない．(31.6.18) と (31.6.21) から分かるように，一般の超対称多重項Sについて，そのD成分の超対称性変換の下での変化は，もはや単純に時空微分ではなく，したがって，そのようなD成分の積分は作用における項としては適切ではない．その代わりに，任意の超場Sから，積分が超対称的な密度

$$\begin{aligned}[S]_D = e\Bigg[&D^S - \frac{i\kappa}{2}\left(\bar{\psi}^\mu\gamma_\mu\gamma_5\lambda^S\right) + \frac{4\kappa}{3}[-sN^S + pM^S - b^\mu V_\mu^S] \\ &-\frac{i\kappa}{3}\left(\overline{\omega^S}\gamma_5\,\mathcal{L}\!\!\!/\right) - \frac{\kappa^2}{4}\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}V_\sigma^S\left(\bar{\psi}_\rho\gamma_\tau\psi_\mu\right) \\ &-\frac{\kappa^2}{8}\epsilon^{\mu\rho\sigma\tau}\left(\overline{\omega^S}\psi_\sigma\right)\left(\bar{\psi}_\rho\gamma_\tau\psi_\mu\right)\Bigg] - \frac{2\kappa^2}{3}C^S\mathcal{L}_{\mathrm{SUGRA}}\end{aligned} \quad (31.6.40)$$

を構成することができる．ここで$\mathcal{L}_{\mathrm{SUGRA}}$は (31.6.11) における超重力

ラグランジアン密度

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SUGRA}} = -\frac{e}{2\kappa^2}R - \frac{1}{2}\left(\bar{\psi}_\mu L^\mu\right) - \frac{4e}{3}\left(s^2 + p^2 - b_\mu b^\mu\right) \qquad (31.6.41)$$

だ. 同様に(31.6.36)と(31.6.20)から, 左カイラル超場Xの$\mathcal{F}$成分を超対称性変換したときの変化は時空微分ではなく, したがって, なんらかの項をこの$\mathcal{F}$項に付け加え, その積分が超対称的となるような密度を構成しなければならない. 変更された$\mathcal{F}$項は,

$$[X]_{\mathcal{F}} = e\left[\mathcal{F}^X + \frac{\kappa}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_{\mu R}\gamma^\mu\psi_L^X\right) + \frac{\kappa^2}{4}\left(\bar{\psi}_{\mu R}[\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu]\psi_{\nu R}\right)\phi^X \right.$$
$$\left. +2\kappa(s - ip)\phi^X\right] \qquad (31.6.42)$$

となる.

物理的に特に興味深い超対称多重項がいくつか存在する. その一つは実非カイラル超対称多重項 $\mathbf{1}$ であり, その唯一のゼロでない成分は$C = 1$だ. (31.6.40)によると, この超対称多重項はD項

$$[\mathbf{1}]_D = -\frac{2\kappa^2}{3}\mathcal{L}_{\mathrm{SUGRA}} \qquad (31.6.43)$$

を持ち, よってなんら新しいものは与えない.

もっと面白い例は**左カイラル**超対称多重項 $\mathbf{I}$ により与えられ, その唯一のゼロでない成分は$\phi = 1$となる. (31.6.42)によると, この超対称多重項は,

$$\mathrm{Re}\,[\mathbf{I}]_{\mathcal{F}} = e\left[\frac{\kappa^2}{4}\left(\bar{\psi}_\mu[\gamma^\mu\,,\,\gamma^\nu]\psi_\nu\right) + 4\,\kappa\,s\right] \qquad (31.6.44)$$

の性質を持つ. 項$c\int d^4x\,\mathrm{Re}\,[\mathbf{I}]_{\mathcal{F}}$がラグランジアン密度内に実係数$c$を伴って現れるときは, この項と超重力の作用(31.6.11)との和は, 補助場の変分に関して,

$$s = 3\,c\,\kappa/2\,, \qquad p = b^\mu = 0 \qquad (31.6.45)$$

で停留している. そこで補助場を消去したあとでは, 作用は宇宙項

$$3\,\kappa^2\,c^2 \int d^4x\, e \tag{31.6.46}$$

を含み, これは真空のエネルギー密度 $-3\,\kappa^2\,c^2$ に対応している. 超対称性が自発的に破れている場合, そのような項は真空状態をローレンツ不変に保つために必要だ. つまり, 超対称性の破れと関連した正の真空エネルギー密度 $F^2/2$ を打ち消すために,

$$3\,\kappa^2\,c^2 = F^2/2 \tag{31.6.47}$$

ととらなければならない. (31.6.44) に戻って, (31.3.11) と比較すると, これはグラヴィティーノの質量[13]

$$m_g = c\,\kappa^2 = \frac{F\kappa}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{4\pi G\,F^2}{3}} \tag{31.6.48}$$

を与え, 以前の結果 (31.3.17) と一致することが分かる.

これらの表式から次節で必要となるいくつかの結果が得られるが, これらの表式の使用例の一つとしてラグランジアン密度のボソン部分*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\rm SUGRA} + \tfrac{1}{2}\,[K(\Phi,\Phi^*)]_D + 2{\rm Re}\,[f(\Phi)]_{\mathcal{F}} \tag{31.6.49}$$

を計算してみよう. ここで $\mathcal{L}_{\rm SUGRA}$ は超重力ラグランジアン密度 (31.6.41) のボソン部分であり, $K(\Phi,\Phi^*)$ は左カイラル超対称多重項 Φ_n とその複素共役の組の実関数だ. また, $f(\Phi)$ は Φ_n だけの関数だ. 積の演算則 (31.6.23), (31.6.25)–(31.6.27), (31.6.29) における純粋にボソン的な項は大域的超対称性の場合と同じであり, これらの法則, あるいは 26 章

---

*しばしば項 $\mathcal{L}_{\rm SUGRA}$ は省略され, その代わりに定数項 $-3/\kappa^2$ を $K(\phi,\phi^*)$ に含めることによって超重力のラグランジアンが導入される. ここでは, この習慣には従わない. つまり, ここではスカラー場の慣例的な規格化を使用し, $K(\phi,\phi^*)$ における項で κ について最低次のものが $\sum_n |\phi_n|^2$ となるようにする.

の超空間形式を使って, 超対称多重項$K(\Phi, \Phi^*)$がボゾン的成分

$$C^K = K(\phi, \phi^*)\,, \tag{31.6.50}$$

$$M^K = -2\,\mathrm{Im}\sum_n \left(\frac{\partial K(\phi,\phi^*)}{\partial \phi_n}\mathcal{F}_n\right) + \cdots\,, \tag{31.6.51}$$

$$N^K = -2\,\mathrm{Re}\sum_n \left(\frac{\partial K(\phi,\phi^*)}{\partial \phi_n}\mathcal{F}_n\right) + \cdots\,, \tag{31.6.52}$$

$$V_\mu^K = 2\,\mathrm{Im}\sum_n \left(\frac{\partial K(\phi,\phi^*)}{\partial \phi_n}\partial_\mu \phi_n\right) + \cdots\,, \tag{31.6.53}$$

$$D^K = 2\sum_{nm}\frac{\partial^2 K(\phi,\phi^*)}{\partial\phi_n\partial\phi_m^*}\Big(-g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\phi_n\,\partial_\nu\phi_m^* + \mathcal{F}_n\,\mathcal{F}_m^*\Big) + \cdots \tag{31.6.54}$$

を持つことを計算できる. ここで点々はフェルミオン場を含む項を表している. また, 左カイラル超対称多重項を掛け合わせる規則 (31.6.37)–(31.6.39) は大域的超対称性の場合と同じであり, これらの規則, あるいは26章の超場形式を使って, 左カイラル超対称多重項$f(\Phi)$がボゾン的成分

$$\phi^f = f(\phi)\,, \tag{31.6.55}$$

$$\mathcal{F}^f = \sum_n \frac{\partial f(\phi)}{\partial\phi_n}\mathcal{F}_n + \cdots \tag{31.6.56}$$

を持つことを計算できる. ここで, 再び点々はフェルミオンを含む項を表している. これらの結果を (31.6.40) と (31.6.42) に代入すると, ラグランジアン密度 (31.6.49) のボゾン的項は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{bosonic}} = &\left[-\frac{e}{2\kappa^2}R - \frac{4e}{3}\Big(s^2+p^2-b_\mu b^\mu\Big)\right]\left[1-\frac{\kappa^2}{3}K(\phi,\phi^*)\right]\\ &-e\sum_{nm}\frac{\partial^2 K(\phi,\phi^*)}{\partial\phi_n\,\partial\phi_m^*}\Big(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_n\partial_\nu\phi_m^* - \mathcal{F}_n\mathcal{F}_m^*\Big)\\ &+\frac{4\,\kappa\, e}{3}\mathrm{Re}\sum_n\frac{\partial K(\phi,\phi^*)}{\partial\phi_n}\Big(\mathcal{F}_n(s+ip)+ib^\mu\partial_\mu\phi_n\Big)\end{aligned}$$

$$+2\,e\,\mathrm{Re}\left(\sum_n \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_n}\mathcal{F}_n + 2\kappa(s-ip)\,f(\phi)\right) \tag{31.6.57}$$

となる.

次に, ラグランジアン密度が停留する値に補助場を設定し, 補助場を消去**しなければならない. これは補助場

$$\mathcal{F}_n = \frac{\kappa^2}{3N}\sum_m \left(\mathcal{G}^{-1}\right)_{mn}\frac{\partial K}{\partial \phi_m^*}\left(-\sum_{k\ell}\left(\mathcal{G}^{-1}\right)_{k\ell}\frac{\partial K}{\partial \phi_\ell}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_k}\right)^* + 3f^*\right)$$
$$-\sum_m \left(\mathcal{G}^{-1}\right)_{mn}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_m}\right)^*, \tag{31.6.58}$$

$$s - ip = \frac{\kappa}{2N}\left(-\sum_{\ell k}\left(\mathcal{G}^{-1}\right)_{k\ell}\frac{\partial K}{\partial \phi_\ell}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_k}\right)^* + 3f^*\right), \tag{31.6.59}$$

$$b_\mu = \frac{\kappa}{2(1-\kappa^2 K/3)}\mathrm{Im}\left(\sum_n \frac{\partial K}{\partial \phi_n}\partial_\mu \phi_n\right) \tag{31.6.60}$$

を与える. ここで

$$N \equiv 1 - \frac{\kappa^2}{3}K + \frac{\kappa^2}{3}\sum_{k\ell}\left(\mathcal{G}^{-1}\right)_{k\ell}\frac{\partial K}{\partial \phi_\ell}\frac{\partial K}{\partial \phi_k^*}$$

と定義されており, $\mathcal{G}(\phi,\phi^*)$ はケーラー計量

$$\mathcal{G}_{nm}(\phi,\phi^*) \equiv \frac{\partial^2 K(\phi,\phi^*)}{\partial \phi_n\,\partial \phi_m^*} \tag{31.6.61}$$

を表している. (31.6.57) でこれを使うと, ボゾン的ラグランジアンは,

$$\mathcal{L}_{\text{bosonic}} = -\frac{e}{2\kappa^2}R\left[1 - \frac{\kappa^2}{3}K\right] - e\sum_{nm}\mathcal{G}_{nm}\,g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_n\partial_\nu\phi_m^*$$

** この手順は一般的なものだが, 厳密には正しくない. というのはラグランジアン密度は補助場について 2 次であるが, 補助場について 2 次の項の係数は場に依存するからだ. 結果として, 補助場について経路積分する際は, 2 次の項の係数の行列式が現れ, それはラグランジアンに $\delta^4(0) = (2\pi)^{-4}\int d^4k\,1$ に比例する項を付け加えることと等価だ. そのような項は次元正則化によって消去でき, その場合 $\int d^4k\,1 = 0$ となる.

$$+\frac{e\kappa^2}{3N}\left|\sum_{mn}\left(\mathcal{G}^{-1}\right)_{nm}\frac{\partial f}{\partial\phi_m}\frac{\partial K}{\partial\phi_n^*}-3f\right|^2$$
$$-\frac{e\kappa^2}{3\left(1-\kappa^2K/3\right)}\,\mathrm{Im}\left[\sum_n\frac{\partial K}{\partial\phi_n}\partial_\mu\phi_n\right]\mathrm{Im}\left[\sum_n\frac{\partial K}{\partial\phi_n}\partial_\nu\phi_n\right]g^{\mu\nu}$$
$$-e\sum_{mn}\left(\mathcal{G}^{-1}\right)_{nm}\frac{\partial f}{\partial\phi_m}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_n}\right)^* \tag{31.6.62}$$

となる.

31.2節の弱場の場合ですでに注意したように, ラグランジアン密度(31.6.62)はアインシュタイン・ヒルベルト項$-eR/2\kappa^2$に因子$(1-\kappa^2K(\phi,\phi^*)/3)$が掛かっているという厄介な性質を持っており, 有効重力定数は時空の各点ごとに変化している. これを矯正するために, ワイル変換を行ない, 新しい計量を,

$$\tilde{g}_{\mu\nu}=\left(1-\kappa^3K/3\right)\,g_{\mu\nu} \tag{31.6.63}$$

で定義する. アインシュタイン・ラグランジアン密度は新しい計量によって,

$$eg^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=\left(1-\frac{\kappa^2}{3}K\right)^{-1}\tilde{e}\,\tilde{g}^{\mu\nu}\left(\tilde{R}_{\mu\nu}\right.$$
$$\left.+\frac{3}{2}\partial_\mu\ln\left(1-\frac{\kappa^2}{3}\right)\partial_\nu\ln\left(1-\frac{\kappa^2}{3}\right)\right)$$

で与えられる. ここで$\tilde{R}_{\mu\nu}$は$g_{\mu\nu}$を計量$\tilde{g}_{\mu\nu}$で置き換えて計算した曲率テンソルであり, また, $\tilde{e}\equiv\sqrt{\mathrm{Det}\,\tilde{g}}$と定義されている. 直接的な計算により, ボゾン的なラグランジアン(31.6.62)は,

$$\mathcal{L}_{\text{bosonic}}=-\frac{\tilde{e}}{2\kappa^2}\tilde{g}^{\mu\nu}\,\tilde{R}_{\mu\nu}$$
$$-\tilde{e}\,\tilde{g}^{\mu\nu}\sum_{nm}\partial_\mu\phi_n\partial_\nu\phi_m^*\left[\left(1-\frac{\kappa^2}{3}K\right)^{-1}\frac{\partial^2K}{\partial\phi_n\phi_m^*}\right.$$
$$\left.+\frac{\kappa^2}{3}\left(1-\frac{\kappa^2}{3}K\right)^{-2}\frac{\partial K}{\partial\phi_n}\frac{\partial K}{\partial\phi_m^*}\right]$$

$$+\frac{\tilde{e}\,\kappa^2}{3N}\left(1-\frac{\kappa^2}{3}K\right)^{-2}\left|\sum_{mn}\left(\mathcal{G}^{-1}\right)_{nm}\frac{\partial f}{\partial\phi_m}\frac{\partial K}{\partial\phi_n^*}-3f\right|^2$$
$$-\tilde{e}\left(1-\frac{\kappa^2}{3}K\right)^{-2}\sum_{mn}\left(\mathcal{G}^{-1}\right)_{nm}\frac{\partial f}{\partial\phi_m}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_n}\right)^* \quad (31.6.64)$$

で与えられる．ワイル変換は因子$(1-\kappa^2K/3)$をアインシュタイン・ヒルベルト項から取り除くのみではない．それはまた，$\partial_\mu\phi_n\,\partial_\nu\phi_m$ と $\partial_\mu\phi_n^*\,\partial_\nu\phi_m^*$ に比例する項を消去する．

この結果は$K(\phi,\phi^*)$の代わりに**修正したケーラー・ポテンシャル** $d(\phi,\phi^*)$ を導入することによって更に簡単化される．ここで，

$$1-\frac{\kappa^2}{3}K\equiv\exp\left(-\frac{\kappa^2 d}{3}\right) \quad (31.6.65)$$

と定義している．また，スカラー場の空間上に新たな計量

$$g_{nm}\equiv\frac{\partial^2 d}{\partial\phi_n\,\partial\phi_m^*} \quad (31.6.66)$$

を導入する．新しい計量の逆と古い計量の逆は，

$$\mathcal{G}^{-1}_{\ell k}=\exp(\kappa^2 d/3)\left[g^{-1}_{\ell k}+\frac{\kappa^2}{3}\frac{\sum_{mn}g^{-1}_{\ell n}g^{-1}_{mk}(\partial d/\partial\phi_n)\,(\partial d/\partial\phi_m^*)}{1-(\kappa^2/3)\sum_{mn}g^{-1}_{mn}(\partial d/\partial\phi_n)\,(\partial d/\partial\phi_m^*)}\right]$$

で関連している．このとき，ボゾン的ラグランジアン密度(31.6.64) は，より簡単な形

$$\mathcal{L}_{\rm bosonic}=-\frac{\tilde{e}}{2\kappa^2}\tilde{g}^{\mu\nu}\,\tilde{R}_{\mu\nu}-\tilde{e}\,\tilde{g}^{\mu\nu}\sum_{nm}g_{nm}\partial_\mu\phi_n\partial_\nu\phi_m^*-\tilde{e}V \quad (31.6.67)$$

をとる．ここで$V(\phi,\phi^*)$はポテンシャル

$$V=\exp(\kappa^2 d)\left[\sum_{nm}g^{-1}_{nm}L_m\,L_n^*\;-3\,\kappa^2\,|f|^2\right] \quad (31.6.68)$$

であり，

$$L_m\equiv\frac{\partial f}{\partial\phi_m}+\kappa^2\,f\frac{\partial d}{\partial\phi_m} \quad (31.6.69)$$

と定義されている.

ポテンシャル(31.6.68)は, 場の強さが条件$L_m = 0$を満たすときに明白な停留点を持つ. しかし, 弱場の場合に見たように, この点では真空のエネルギーは一般に負の値$-3\kappa^2|f|^2$をとる. 停留点$L_m = 0$が平坦空間の解を与えるためには, $f(\phi)$と$\partial f(\phi)/\partial\phi_n$の双方がこれらの場の値でゼロとなる必要がある. (31.6.58)と(31.6.59)を調べると, スカラー補助場$\mathcal{F}_n$, s, pが, そのような場の値でゼロとなることが示される. したがって, αを定数とするグラヴィティーノとカイラル・スピノル場の大域的超対称性変換の下での変分(31.6.2)と(31.6.35)の真空期待値はゼロとなる. こうして, $f(\phi)$と$\partial f(\phi)/\partial\phi_n$が全てゼロとなるような真空の場の値は, 大域的超対称性が古典極限で破れていない場合だ. 次の節では超対称性が実際に破れている真空の配位を考える.

ここでは示さないが, ゲージ超場を含めることによって必要となるボゾン的ラグランジアン内の余分な項は, 全体に掛かる行列式因子$\tilde{e}$や添字の上げ下げに必要な計量を除いて, 重力によっては影響を受けない. 補助場を消去し, ワイル変換した後では, カイラル超場や重力超場のみならずゲージ超場を持つ理論の完全なボゾン的ラグランジアンは,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{bosonic}}/\tilde{e} = & -\frac{1}{2\kappa^2}\tilde{R}^\mu{}_\mu - \sum_{nm} g_{nm} D_\mu\phi_n D^\mu\phi_m^* - \tfrac{1}{4}\sum_{AB}\operatorname{Re} f_{AB}\, F^A_{\mu\nu}F^{B\mu\nu} \\
& -\tfrac{1}{8}\sum_{AB}\operatorname{Im} f_{AB}\, F^A_{\mu\nu}F^B_{\rho\sigma}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} - V \qquad (31.6.70)
\end{aligned}
$$

となる. ここで15.1節で使った記法を用いると, D_μ, $F^A_{\mu\nu}$, t_Aはそれぞれゲージ共変微分, 場の強度テンソル, カイラル・スカラー超場上のゲージ生成子の表現を表している. f_{AB}はϕ_nについての独立な正則関数だ. 全ての時空添字は$\tilde{g}_{\mu\nu}$を使って上げ下げする. そしてポテン

シャルVは,

$$V = \exp(\kappa^2 d)\left[\sum_{nm} g^{-1}_{nm} L_m L^*_n - 3\,\kappa^2 |f|^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{AB} f^{-1}_{AB}\left(\sum_{nm}\frac{\partial d}{\partial \phi_n}(t_A)_{nm}\phi_m\right)$$
$$\times\left(\sum_{kl}\frac{\partial d}{\partial \phi_k}(t_B)_{kl}\phi_l\right)^* \tag{31.6.71}$$

の形をとる.

ボゾン的ポテンシャル(31.6.71)は十分簡単な形をしているために, ϕ_nのみ, あるいはϕ^*_nのみに依存するdにおける項が, 超ポテンシャルへの補正となることをはっきりさせることができる. 特に,

$$d(\phi,\phi^*) = \tilde{d}(\phi,\phi^*) + a(\phi) + a(\phi)^*\ ,\quad f(\phi) = \tilde{f}(\phi)\exp\left(-\kappa^2 a(\phi)\right) \tag{31.6.72}$$

と書いた場合, ポテンシャル(31.6.71)は$\tilde{d}$と$\tilde{f}$を使うと, dとfを用いたときと同じ形になる. ここで$a(\phi)$はゲージ不変性条件

$$\sum_{nm}\frac{\partial a(\phi)}{\partial \phi_n}(t_A)_{nm}\phi_m = 0$$

を満たす任意の正則関数だ. 超ポテンシャルの適切な再定義をすると, $d(\phi,\phi^*)$の冪級数展開内のϕ_nのみ, あるいはϕ^*_nのみに依存する任意の項を消去できる. これを理解すると, $d(\phi,\phi^*)$の冪級数展開の主要な項は(ティルダを落して)$\sum_{nm} d_{nm}\phi_n\phi^*_m$ の形になる. 超場の適切な線形変換をすると, 行列d_{nm}をδ_{nm}に等しくすることができ, $d(\phi,\phi^*)$の冪級数展開は,

$$d(\phi,\phi^*) = \sum_n |\phi_n|^2 + \cdots \tag{31.6.73}$$

で始まり, 計量(31.6.66)の冪級数展開は,

$$g_{nm} = \delta_{nm} + \cdots \tag{31.6.74}$$

で始まる. (31.6.67) の右辺の第 2 項を調べると, このようにして定義されるスカラー場は正準的に規格化されていることが示せる.

フェルミオン項はずっと複雑だ. ここではゲージーノ場について 2 次の項のみ,

$$\mathcal{L}^{(2)}_{\text{gaugino}}/\tilde{e} = -\frac{1}{2}\,\text{Re}\sum_{AB} f_{AB}\left(\bar{\lambda}_A \not{D} \lambda_B\right) + \frac{1}{2}\exp(\kappa^2 d/2)$$
$$\times \text{Re}\sum_{mn}\sum_{AB} g^{-1}_{nm} L_m \left(\frac{\partial f_{AB}}{\partial \phi_n}\right)^* \left(\bar{\lambda}_A \lambda_B\right) \tag{31.6.75}$$

を引用しよう. ここで L_m は (31.6.69) により与えられる. ゲージ場が正準的に規格化されている場合は, 関数 f_{AB} をスカラー場の冪で展開すると, その展開の定数項は δ_{AB} となり, よってゲージーノ場 λ_A もまた正準的に規格化されていることが分かる.

* * *

$d(\phi, \phi^*)$ における全ての正則項と, その複素共役を超ポテンシャル内に移動させる代わりに, 変換 (31.6.72) を使って, 新たな超ポテンシャル $\tilde{f}(\phi)$ をある定数に等しくすることができる. この定数は $a(\phi) = -\kappa^{-2}\ln f(\phi)$ ととることによって 1 に選ぶことができる. するとポテンシャルは関数

$$\mathcal{D}(\phi, \phi^*) \equiv d(\phi, \phi^*) + 2\,\kappa^{-2}\text{Re}\,\ln f(\phi) \tag{31.6.76}$$

のみに依存し,

$$V = \exp(\kappa^2 \mathcal{D})\left[\kappa^4 \sum_{nm} g^{-1}_{nm}\left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \phi_m}\right)\left(\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \phi_n}\right)^* - 3\,\kappa^2\right]$$
$$+\frac{1}{2}\text{Re}\sum_{AB} f^{-1}_{AB}\left(\sum_{nm}\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \phi_n}(t_A)_{nm}\phi_m\right)$$
$$\times\left(\sum_{kl}\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \phi_k}(t_B)_{kl}\phi_l\right)^* \tag{31.6.77}$$

の形となる．また，スカラー場についての計量 (31.6.66) は，

$$g_{nm} = \frac{\partial^2 \mathcal{D}}{\partial \phi_n \, \partial \phi_m^*} \tag{31.6.78}$$

と書ける．ここでは示さないが，ある対称性により，ケーラー・ポテンシャルと超ポテンシャルを 1 個の関数 $\mathcal{D}(\phi, \phi^*)$ で置き換えることができれば，その対称性により，またフェルミオン場とゲージ場を持つ全ての項を含めた全ラグランジアン内でこの置き換えをすることができる．

ポテンシャル V が ϕ_m の全ての値でゼロとなるような興味深い「非スケール」理論の部類が存在する．例えば，ゲージ中性なカイラル・スカラー超場 1 個だけを含み，

$$\mathcal{D} = -3\kappa^{-2} \ln \Big(h(\phi) + h(\phi)^* \Big) \tag{31.6.79}$$

の場合がこれにあたる．ここで，$h(\phi)$ は ϕ の任意の関数だ．しかし，$\mathcal{D}$ がこの形となることを要請する原理は知られていない．

31.7 重力を媒介とする超対称性の破れ

ここで，超対称性の破れの問題を再びとりあげる．28 章の最初で議論したように，超対称性が階層性問題を解くために，つまり，プランク質量 $m_{\rm Pl} \equiv 1/\sqrt{8\pi G}$ と観測される粒子の質量スケールの大きな比を理解するために有用ならば，超対称性はプランク・スケールで破れていてはいけなくて，ずっと小さいある質量スケールでのみ自発的に破れていなければならない．質量スケールの非常に大きな比を自然に生み出す唯一のもっともらしい機構は，漸近的自由なゲージ相互作用の非摂動論的効果だ．これらの相互作用がプランク・スケールで適度に弱い場合は，エネルギーが減少するに伴ってゆっくりと相互作用が増加し，ずっと低いスケール $\Lambda \ll m_{\rm Pl}$ では，それらの相互作用は強くなる．

既知の素粒子はそのような強い力を感じないので，これらの強いゲージ相互作用によって直接的であれ間接的であれ，どんな超対称性の破れが引き起こされても，観測される粒子との相互作用によって，この超対称性の破れは観測される粒子に伝えられなければならない．

28.3節では超対称性の破れを観測される粒子に伝える二つの可能な機構についてふれた．一つ目の機構はゲージを媒介とする超対称性の破れであるが，これは28.6節で詳細に議論した．ここでは残りのもう一つの機構である重力の強さをもった効果によって超対称性の破れが伝えられる場合を考える．

1980代の初めには，超対称性の破れを媒介するものとして重力が最初に考えられ[14]，二つの項からできている超ポテンシャルが一般に仮定された．つまり，観測可能な粒子の全ての超場を含む**観測可能セクター**の様々な左カイラル超場Φ_rの関数$f(\Phi)$と，**隠れたセクター**[15]の様々な左カイラル超場Z_kの関数$\tilde{f}(Z)$であり，後者は標準模型の$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ゲージ群の下で中性だ．さらに，隠れたセクターの超ポテンシャルは，

$$\tilde{f}(Z)=\epsilon^3 F(\kappa Z) \tag{31.7.1}$$

の形をとると仮定されている．ここでϵはプランク質量よりもずっと小さいある質量であり，$F(\kappa Z)$はκZについての冪級数で，その係数の大きさは1の程度だ．全超ポテンシャルが和$f(\Phi)+\tilde{f}(Z)$だという仮定には幾分任意性があるが，後で見るように，この仮定が少なくとも近似的には正しいという理由を考えることは難しくない．このアプローチへのより厳しい批判は，これは階層性問題を解くための頼みとなるものを何も提供しない，つまりエネルギーϵはプランク質量よりずっと小さいと単に仮定しているにすぎないというものだ．

重力を媒介として超対称性が破れるこれらの最初の模型が発展した後，エネルギーが減少するにつれてゲージ結合定数がゆっくりと増加

し, エネルギー $\Lambda \ll m_{\rm Pl}$ でこの結合定数が強くなるということを使って, エネルギー・スケールの階層性を自然に説明する別の模型が現れた. 超対称性の破れの源に関する異なる仮定によって, これらの模型は二つの場合に分類される. あとで見るように, どちらの場合でもスクォークとスレプトンは超対称性の破れによってグラヴィティーノ質量 m_g の大きさの質量を得るが, 二つの場合で m_g の表式は異なっている. つまり, 第 1 の場合は $m_g \approx \kappa\Lambda^2$ であるが, 第 2 の場合は $m_g \approx \kappa^2\Lambda^3$ であり, それぞれ $\Lambda \approx 10^{11}$GeV と $\Lambda \approx 10^{13}$GeV を与える. 二つの場合では, $B\mu$ パラメータ, A パラメータ, ゲージーノ質量を含む軟らかい超対称性の破れのパラメータの表式も異なることが分かる.

第 1 の場合[16]

重力を媒介として超対称性が破れるこの第 1 の場合, 理論の超場は二つのセクターに分類されると仮定する.

観測可能セクター: これらは最小超対称標準模型の超場だ. つまり, $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ ゲージ超場はクォーク, 反クォーク, レプトン, 反レプトン, ヒッグス左カイラル超場であり, これらを一般に Φ_r と呼ぶ.

隠れたセクター: これらは, $m_W \ll \Lambda \ll m_{\rm Pl}$ の中間のエネルギー・スケール Λ で強くなる漸近的自由なゲージ相互作用のゲージ超場と, このゲージ相互作用を感じる左カイラル超場 Z_k とをあわせたものだ.

Z_k は $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ ゲージ群の下で中性と仮定しなければならない. さもなければゲージを媒介として超対称性が破れる場合に戻ってしまうからだ. また, 観測可能セクターは十分よく知られており, そのセクターのカイラル超場が隠れたセクターのゲージ相互作用を感じないことは確かだ.

$f(\Phi)+\tilde{f}(Z)$ の形をした全超ポテンシャルのくりこみ可能部分が自

然に存在するためには, プランク・スケール以下で生き残る対称性は群 G_H(それは隠れたセクターのゲージ群の一部かもしれない) と G_O(それは観測可能セクターのゲージ群 $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ の一部かもしれない) を含んでいると仮定できる. 観測可能セクターの全ての場は G_H の下で不変であり, 隠れたセクターの全ての場は不変ではない. そして群 G_O の下で隠れたセクターの全ての場は不変であり, 観測可能セクターの全ての場は不変ではない. この場合, 観測可能セクターの場が超ポテンシャルのある項に現れるときには, それらの場は少なくとも二つなければならない. また, 隠れたセクターの場が超ポテンシャルのある項に現れるならば, それらの場は少なくとも二つなければならない. したがって, 3 次多項式として書ける超ポテンシャルの場合, 隠れたセクターの場と観測可能セクターの場両方を含む項は存在できない. この議論は, 隠れたセクターの超場と観測可能セクターの超場両方の因子を 2 個以上含むようなくりこみ可能でない項が超ポテンシャル内に存在することを排除しないし. この可能性については後で再び議論する. もちろん, 隠れたセクターの強い相互作用は, 隠れたセクターの全超ポテンシャル $\tilde{f}(Z)$ 内に付加的な非摂動論的項を生成するが, これらの項も隠れたセクターの超場のみに依存していると仮定している.

このとき, 超ポテンシャルが $f(\Phi) + \tilde{f}(Z)$ の形であることを仮定すると, これらの超場のスカラー成分についてのポテンシャルは (31.6.71) より,

$$V = e^{\kappa^2 d}\Bigg[\sum_{rs} g^{-1}_{rs}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_r} + \kappa^2 (f + \tilde{f})\frac{\partial d}{\partial \phi_r}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_s} + \kappa^2 (f + \tilde{f})\frac{\partial d}{\partial \phi_s}\right)^*$$
$$+2\mathrm{Re}\sum_{rk} g^{-1}_{rk}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_r} + \kappa^2 (f + \tilde{f})\frac{\partial d}{\partial \phi_r}\right)\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k} + \kappa^2 (f + \tilde{f})\frac{\partial d}{\partial z_k}\right)^*$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{kl} g_{kl}^{-1}\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial z_k}+\kappa^2\left(f+\tilde{f}\right)\frac{\partial d}{\partial z_k}\right)\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial z_l}+\kappa^2\left(f+\tilde{f}\right)\frac{\partial d}{\partial z_l}\right)^* \\
&-3\,\kappa^2\left|f+\tilde{f}\right|^2\Bigg] \\
&+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{AB} f_{AB}^{-1}\left(\sum_{kl.}\frac{\partial d}{\partial z_k}(t_A)_{kl}z_l\right)\left(\sum_{mn}\frac{\partial d}{\partial z_m}(t_B)_{mn}z_n\right)^* \\
&+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{AB} f_{AB}^{-1}\left(\sum_{rs}\frac{\partial d}{\partial \phi_r}(t_A)_{rs}\phi_s\right)\left(\sum_{tu}\frac{\partial d}{\partial \phi_t}(t_B)_{tu}\phi_u\right)^* \qquad (31.7.2)
\end{aligned}
$$

と与えられる．ゲージ相互作用から生じる項を書く際に，隠れたセクターと観測可能セクターのゲージ・ボゾンの混合が無いと，ここでは仮定している．つまり，f_{AB}^{-1} はゲージ生成子 t_A と t_B の任意の対についてゼロとなり，t_A は ϕ_r に非自明に作用し，t_B は z_k に非自明に作用するか，あるいはその逆だ．

隠れたセクターのスカラー場 z_k が大きさ Λ であり，隠れたセクターの超ポテンシャル $\tilde{f}(z)$ の変化する部分が大きさ Λ^3 であり，次元から $\partial\tilde{f}/\partial z_k$ が大きさ Λ^2 であるような場の空間の領域を調べることは興味深い．$\tilde{f}$ の定数部分の大きさは暫く放っておくとしよう．あとで見るように宇宙項を消去するためには Λ^3 よりもずっと大きな定数項を $\tilde{f}$ は含まなければならない．

更に，調べるべき場の空間の領域を，観測可能セクターにおける場 ϕ_r が大きさ $\kappa\Lambda^2$ を持つ領域として定義する．なぜなら，すぐ分かるように，これは隠れたセクターにおける超対称性の破れが重力的効果により観測可能セクターに生じるときの特徴的な質量スケールだからだ．場の大きさが $\kappa\Lambda^2$ のとき，観測可能セクターの超ポテンシャル $f(\phi)$ は大きさ $\kappa^3\Lambda^6$ であると仮定され，その微分 $\partial f(\phi)/\partial\phi_r$ は大きさ $\kappa^2\Lambda^4$ だ．

前節の終りで議論した超ポテンシャルとスカラー場の定義と，上で仮定した $G_H\times G_O$ 対称性の結果として，修正されたケーラー・ポテン

シャルは,

$$d(\phi,\phi^*,z,z^*)=\sum_r|\phi_r|^2+\sum_k|z_k|^2+O(\kappa^2z^{*2}z^2)$$
$$+O(\kappa^2z^*z^3)+O(\kappa^2z^{*3}z)+O(\kappa^2\phi^{*2}z^2)+O(\kappa^2\phi^{*2}z^*z)$$
$$+O(\kappa^2z^{*2}\phi^2)+O(\kappa^2z^*z\phi^2)+O(\kappa^2\phi^*\phi z^2)$$
$$+O(\kappa^2z^{*2}\phi^*\phi)+O(\kappa^2\phi^*z^*\phi z)+O(\kappa^2\phi^{*2}\phi^2)$$
$$+O(\kappa^2\phi^*\phi^3)+O(\kappa^2\phi^{*3}\phi)+\cdots \tag{31.7.3}$$

の形となる.* ここで点々は高次の項を表している. このとき, 計量 (31.6.66) は成分

$$g_{rs}=\delta_{rs}+O(\kappa^2z^2)+O(\kappa^2z^{*2})+O(\kappa^2z^*z)$$
$$+O(\kappa^2\phi^2)+O(\kappa^2\phi^{*2})+O(\kappa^2\phi^*\phi)+\cdots\,, \tag{31.7.4}$$

$$g_{kl}=\delta_{kl}+O(\kappa^2z^2)+O(\kappa^2z^{*2})+O(\kappa^2z^*z)$$
$$+O(\kappa^2\phi^2)+O(\kappa^2\phi^{*2})+O(\kappa^2\phi^*\phi)+\cdots\,, \tag{31.7.5}$$

$$g_{rk}=g^*_{kr}=O(\kappa^2\phi z^*)+O(\kappa^2\phi z)$$
$$+O(\kappa^2\phi^*z^*)+O(\kappa^2\phi^*z)+\cdots \tag{31.7.6}$$

を持つ. (dにおける特徴的なエネルギー・スケールは$1/\kappa$だと仮定している. なぜなら, $\tilde{f}$と対照的に, dは未知の動力学的効果によってプランク・スケールで生成される修正されたケーラー・ポテンシャルだからだ. $\tilde{f}$の方は, スケールΛでの強いゲージ結合定数の動力学的効果からその構造が決まる.) g_{rs}とg_{kl}は一般に大きさ1の程度であるが, g_{rk}とg_{kr}の混合成分は$\kappa^2(\kappa\Lambda^2)\Lambda=\kappa^3\Lambda^3\ll 1$ の大きさだ. g^{-1}の成分についても同じことが言える. つまり, $(g^{-1})_{rs}$と$(g^{-1})_{kl}$は一般に大きさ1の程度であるが, $(g^{-1})_{rk}$と$(g^{-1})_{kr}$は$\kappa^3\Lambda^3\ll 1$の大きさだ.

---

*$O(\kappa^2z^{*2}z^2)$は$\kappa^2\sum_{klmn}C_{klmn}z^*_kz^*_lz_mz_n$ の形の項を表しており, C_{klmn}は大きさ1の程度の定数係数となっていて, (31.7.3)–(31.7.6) における残りの項についても同様だ.

これらの評価から, もし打ち消し合いが起こらなかったならば, ポテンシャル (31.7.2) における主要な項は少なくとも Λ^4 の大きさとなり,

$$[V]_{\Lambda^4} = \sum_k \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k} \right|^2 - 3\kappa^2 \left| \tilde{f}^0 \right|^2 \tag{31.7.7}$$

の形をとることが分かる. ここで $\tilde{f}^0$ は $\tilde{f}$ における定数項であり, 真空のエネルギーを消去するのに必要なものだ. 超対称性は隠れたセクターで自発的に破れると仮定しているので, ある点 z_k^0 が存在し, その点で $\sum_k |\partial\tilde{f}/\partial z_k|^2$ はゼロとはならないが少なくとも局所的に最小となるということが要請される. このとき, この大きさで真空のエネルギーがゼロとなるためには,

$$3\kappa^2 \left| \tilde{f}^0 \right|^2 = \sum_k \left| \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_k} \right)^0 \right|^2 \tag{31.7.8}$$

ととらなければならず, 右辺の上付き添字0は, この量が $z = z^0$ で評価されるべきであることを表している. つまり, $\tilde{f}^0$ は大きさ Λ^2/κ の異常に大きな値として与えられなければならない. これは, 重力を媒介として超対称性が破れる第2の場合で必要だと判明する微調整よりずっと極端な微調整だ. しかし, 宇宙項の真の理解が無い以上, 超対称性が破れるあらゆる理論においてなんらかの微調整が必要になるであろう.

真空のエネルギー密度 $F^2/2$ を平坦空間の値 $\sum_k |(\partial\tilde{f}/\partial z_k)^0|^2$ に等しいと置くことにより, グラヴィティーノ質量についての表式 (31.3.17) における超対称性の破れのパラメータ F を計算できる. そうすると, (31.3.17) と (31.7.8) により与えられるグラヴィティーノの質量は,

$$m_g = \kappa \sqrt{\frac{1}{3} \sum_k \left| \left(\frac{\partial \tilde{f}(z)}{\partial z_k} \right)^0 \right|^2} = \kappa^2 \left| \tilde{f}^0 \right| \tag{31.7.9}$$

となる．これは観測可能セクターのスカラー場と同じ大きさ $\approx \kappa\Lambda^2$ だ．

さて，(31.7.2) において観測可能セクターのスカラー ϕ_r に依存する項に話を戻そう．通常の超対称性項 $\sum_r |\partial f/\partial\phi_r|^2$ が大きさ $m_g^4 \approx \kappa^4\Lambda^8$ となるような場の値を考えているので，ϕ に依存する項でこの大きさかそれ以上の大きさのものを (31.7.2) において全て集めなければならない．(31.7.2) の右辺における六つの行をそれぞれ見てみよう．

$\kappa^2(f+\tilde{f})\partial d/\partial\phi_r$ における主要な項は $\kappa^2\tilde{f}^0\phi_r^*$ であり，これは $\partial f/\partial\phi_r$ のように大きさ $\kappa^2(\Lambda^2/\kappa)(\kappa\Lambda^2) = \kappa^2\Lambda^4$ であるが，$\kappa^2(f+\tilde{f})\partial d/\partial\phi_r$ における他の項はずっと小さい．最低次で考えると，$\exp(\kappa^2 d)$ を 1 と近似でき，g_{rs}^{-1} を δ_{rs} と近似できる．そこでこの次数で (31.7.2) の 1 行目は，

$$\sum_r \left| \frac{\partial f}{\partial\phi_r} + \kappa^2\tilde{f}^0\phi_r^* \right|^2$$

を与える．これは望ましい大きさ $\kappa^4\Lambda^8$ なので，より高次の補正を考える必要はない．

g_{rk}^{-1} における主要な項は大きさ $\kappa^3\Lambda^3$ だ．また，$\partial\tilde{f}/\partial z_k$ における主要な項は大きさ Λ^2 であるが，$\kappa^2(f+\tilde{f})\partial d/\partial z_k$ はもっと小さく，大きさ $\kappa\Lambda^3$ だ．そして，すでに見たように $\partial f/\partial\phi_r + \kappa^2(f+\tilde{f})\partial d/\partial\phi_r$ における主要な項は大きさ $\kappa^2\Lambda^4$ なので，(31.7.2) の 2 行目の項は大きさ $(\kappa^3\Lambda^3)(\Lambda^2)(\kappa^2\Lambda^4) = \kappa^5\Lambda^9$ だ．(31.7.2) における大きさ $\kappa^4\Lambda^8$ の項と比較すると，この項は無視してよい．

(31.7.2) における 3 行目と 4 行目の主要な項は大きさ Λ^4 であるが，これらは ϕ_r に依らない．f を含む 3 行目の項には ϕ 依存性がある．この種の主要項は $2\kappa^2\mathrm{Re}\,[f\sum_k z_k^*(\partial\tilde{f}/\partial z_k)^*]$ であり，これは大きさ $\kappa^5\Lambda^9 \ll \kappa^4\Lambda^8$ であり，つまりは無視して良い．また，(31.7.2) の 4 行目の f を含む項から ϕ 依存性が現れる．この種の主要項は，

$$-6\kappa^2\mathrm{Re}\,[f\tilde{f}^{0*}]$$

であり，これは大きさ $\kappa^2(\kappa\Lambda^2)^3\Lambda^2/\kappa = \kappa^4\Lambda^8$ だ．因子 $\exp(\kappa^2 d)$ は，ϕ

依存性を持つ大きさ$\kappa^2(\kappa\Lambda^2)^2$の項を含んでいるが, これらはポテンシャルに掛かり, 大きさΛ^4までで考える限り, その主要な項(31.7.7)はゼロとなるように調整されている. そこでこの源から現れるϕ依存性を持つ項は, 大きさ$\kappa^4\Lambda^8$よりもずっと小さい. ϕ依存性を持つ他の型の項が存在し, それはg_{kl}^{-1}におけるϕ依存性を持つ項から生じる. (31.7.4)–(31.7.6)から, これらの項を$\kappa^2 u_{kl}(\phi,\phi^*)$と書くことができる. ここで$u_{kl}$は, ϕ_rとϕ_r^*の斉次2次多項式であり, 係数の大きさは1の程度だ. これにより(31.7.2)の3行目にϕ依存性を持つ項が生じ, それは,

$$\kappa^2\sum_{kl} u_{kl}(\phi,\phi^*)\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial z_k}\right)^0\left(\frac{\partial\tilde{f}}{\partial z_l}\right)^{0*}$$

の形をしている. これは大きさ$\kappa^2(\kappa\Lambda^2)^2\Lambda^4=\kappa^4\Lambda^8$だ.

(31.7.2)の5行目のϕに依存する主要な項は2種類ある. 一つは, f_{AB}^{-1}における項$\kappa^2\phi^2$で, 両方のdがともに主要項によって与えられる大きさz^*zの項から生じる. もう一つは, dの内の一方がκの因子を二つ, ϕあるいはϕ^*の因子を二つ, zあるいはz^*の因子を二つ持ち, f_{AB}ともう一方のdがそれぞれ大きさ1と大きさz^*zを持つ主要項から生じる. ϕ依存性を持つこれら2種類の項は両方とも大きさ$\kappa^2(\kappa\Lambda^2)^2\Lambda^4=\kappa^4\Lambda^8$の寄与を及ぼすので高次の項は無視してもよい.

(31.7.2)の6行目の主要な項は, f_{AB}^{-1}における大きさ1の程度の主要な項と, dにおけるϕ依存性を持つ大きさ$\phi^*\phi$の主要な項とから生じる. これはポテンシャルに大きさ$(\kappa\Lambda^2)^4$の寄与を与えるので, ここでも高次の項は無視してよい.

ポテンシャル(31.7.2)はまた大きさ$\kappa^2\Lambda^6$, $\kappa^4\Lambda^8$等のϕによらない項を含んでいる. 大きさ$\kappa^2\Lambda^6$の項は打ち消し合い, $\tilde{f}(z)$における定数項を(31.7.8)で与えられる値から少しずらすことによって大きさ$\kappa^4\Lambda^8$の項を任意の値Cにすることができる.

これらの結果をあわせると, 大きさ$\kappa^4\Lambda^8\approx m_g^4$までで観測可能セク

ターのポテンシャルは,

$$V_O(\phi,\phi^*)=\sum_r\left|\frac{\partial f(\phi)}{\partial\phi_r}+\kappa^2\tilde{f}^0\phi_r^*\right|^2-6\kappa^2\mathrm{Re}\left[f(\phi)\tilde{f}^{0\,*}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\sum_A\left|\sum_{rs}\phi_r^*(t_A)_{rs}\phi_s\right|^2$$
$$+Q(\phi,\phi^*)+C \qquad (31.7.10)$$

となる. ここで $Q(\phi,\phi^*)$ は, ϕ あるいは ϕ^* について2次の多項式であり, 係数の大きさは $\kappa^2\Lambda^4\approx m_g^2$ だ. これは(31.7.2)の3行目の g_{kl}^{-1} における ϕ 依存性を持つ項からと, (31.7.2)の5行目の f_{AB}^{-1} と d における ϕ 依存性を持つ項から生じる. 全てのスカラー場がゼロとなるときに $f_{AB}=\delta_{AB}$ となるようにゲージ超場を規格化している. (また隠れたセクターのスカラー z_k をその平衡値から ϕ 依存性を持つようにずらしたとき, このずらしから生じる ϕ 依存性がある. しかし, このずらしは高々大きさ $(\kappa\Lambda^2)^4/\Lambda^3$ であり, (31.7.7)は $z=z^0$ で停留的だと仮定しているので, このずらしは観測可能セクターの場の有効ポテンシャルに2次で現れる. よって無視しても良い.) このポテンシャルが最小値でゼロとなるように, 定数 C を選んでも良い.

最後に超ポテンシャルにおけるくりこみ可能でない項に話を戻そう. すでに述べたように, Φ に依存するこの種の主要項は大きさ $\kappa\Phi^2Z^2$ だと期待される. 隠れたセクターの超場 Z_k をその平衡値 z_k^0 に等しく置くと, これらの項は Φ_r についての2次多項式となり, その係数の大きさは $\kappa\Lambda^2$ となる. こうして最低次までで考えると, 係数の大きさが $\kappa\Lambda^2\approx m_g$ で与えられる Φ_r の2次多項式を超ポテンシャル内に単に含めることによって, これらのくりこみ可能でない項を考慮することができる.

このようにして, 重力を媒介として超対称性が破れる理論は, 28.1節と28.5節で説明した μ 項の問題を避けている. 標準模型の $SU(3)\times$

$SU(2)\times U(1)$ 対称性から, 最小超対称標準模型の超ポテンシャルにおいてただ一つの超くりこみ可能項 $\mu(H_1^{\mathrm{T}}eH_2)$ だけが許されることを思い出そう. なぜ係数 μ がプランク質量の大きさでないかを自然に説明するためには, 強いCPの破れと関連して23.6節で議論した「ペッチェイ・クイン」対称性のような何らかの種類の対称性を課す必要がある. その対称性の下で積 $(H_1^{\mathrm{T}}eH_2)$ は中性ではない. しかし, 超対称性が破れて現れる質量 m_g と同じ大きさに μ 項の μ をとることが現象論的に必要なことを28.5節でみた. 超ポテンシャルが $(H_1^{\mathrm{T}}eH_2)$ と隠れたセクターの場 z_k の2次の項と大きさ κ の係数の積を含むくりこみ可能でない項をもつ場合は, その隠れたセクターの場の真空期待値によるペッチェイ・クイン対称性の破れから自然に, このような μ 項が現れることができる.**

このとき, 有効超ポテンシャル $f(\phi)$ は, 場 ϕ_r について3次の斉次多項式 $f^{(3)}(\phi)$ と, 場 ϕ_r について2次の斉次多項式 $f^{(2)}(\phi)$ の形として表せる μ 項とからできていると仮定する. ここで前者の係数は非常に荒っぽくいって大きさ1の程度であり, 後者の係数は大きさ $m_g \approx \kappa\Lambda^2$ だ. このとき, ポテンシャル(31.7.10)は,

$$\begin{aligned} V_O(\phi,\phi^*) = &\sum_r \left|\frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi_r}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{AB}\left|\sum_{rs}\phi_r^*(t_A)_{rs}\phi_s\right|^2 \\ &-2\kappa^2 \mathrm{Re}\left[f^{(2)}(\phi)\tilde{f}^{0\,*}\right] + \kappa^4|\tilde{f}^0|^2\sum_r|\phi_r|^2 \\ &+Q(\phi,\phi^*) + C \end{aligned} \tag{31.7.11}$$

となる. 右辺の1行目の項は, 超対称ポテンシャルを与えるが, 2行

** これはギウダイス・マシエロ機構として知られている[17]. これは, しばしば修正されたケーラー・ポテンシャル d におけるくりこみ可能でない正則項や反正則項によって記述される. しかし, 前節の終りで議論したように, そのような項は全て超ポテンシャルにおける正則因子と交換することができる. ここで d は正則項や反正則項を持たないように定義した. この定義を用いると, μ 項は超ポテンシャルにおけるくりこみ可能でない項からのみ現れることができる.

目, 3 行目の項は軟らかい超対称性の破れを与える. $\tilde{f}^0 \approx \Lambda^2/\kappa$ と $(\partial\tilde{f}/\partial z)^0 \approx \Lambda^2$ を使うと, (31.7.10) において, 軟らかい超対称性の破れの項内の次元を持つ定数は $\kappa\Lambda^2 \approx m_g$ の全ての冪となり, ここで観測可能セクターのスカラー場の期待値が見つかると期待され, 調べるべき場の空間の領域としてこれを選んだことが正当化される.

$\kappa\Lambda^2$ を超対称標準模型の有効ラグランジアンにおける典型的な質量 $\approx$ 1TeV と等しいと置くと, $\Lambda \approx 10^{11}$GeV が分かる. 23.6 節で議論したように, スケール $\Lambda \approx 10^{11}$GeV でのペッチェイ・クイン対称性の自発的破れは, ちょうど強い CP 問題を解決するために必要なものになっているということは少々勇気づけられる. 強い CP 問題を解決するために, 対称性の破れのスケールは, 天文学的な観測から許される 10^{10}GeV から 10^{12} GeV の範囲にあることが必要だからだ.

ポテンシャルと最小超対称標準模型のラグランジアン密度 (28.4.1) におけるスカラー場の項とを比較すると, 重力を媒介として超対称性が破れるこの第 1 の場合は, 大きさ m_g^2 の ($B\mu$ を含む) 係数を持つ軟らかいスカラー質量項によってのみ超対称性が破れることが預言される. $\kappa\Lambda$ についての最低次で, 超対称性の破れに関係した 3 次線形項の係数 A と C はゼロとなる.

これらの結果の深刻な問題は, (31.7.11) における 2 次多項式 $Q(\phi, \phi^*)$ が, フレーバーを変化させる観測されない過程を妨げている 28.4 節で議論したスクォーク質量の間の縮退とスレプトン質量の間の縮退を保つ理由はないということだ. しかし, ポテンシャルの (31.7.11) における第 4 項は, スカラーの質量の 2 乗に対して $\kappa^4|\tilde{f}^0|^2 \approx \kappa^2\Lambda^4$ の付加的な寄与を与える. この寄与は全てのスカラーについて同じであり, したがって, フレーバーが変化する過程の上限について実験から課せられる制限は, ((31.7.2) の 3 行目と 5 行目の項から生じる) $Q(\phi, \phi^*)$ における係数が $\kappa^2\Lambda^4$ と比較してたまたま小さい場合に満たすことができる.

$Q(\phi, \phi^*)$ が実際に無視できる場合は，最小超対称標準模型のパラメータについて興味深い関係がある．超ポテンシャル $f^{(2)}$ の 2 次の項を $\mu(\phi_1^{\rm T} e \phi_2)$ ととると，(28.4.1) における係数 $B\mu$ は (31.7.11) の第 2 項から $B\mu = -\kappa^2 \mu \tilde{f}^{0*}$ と与えられるので，

$$|B| = \kappa^2 |\tilde{f}^0| = m_g$$

となり，(31.4.13) と一致する．また，全てのスクォークとスレプトンの質量 M_s は，(31.7.11) の 3 番目の項から $\kappa^2 |\tilde{f}^0|$ と与えられるので，新しい関係

$$|B| = M_s \tag{31.7.12}$$

が得られる．全てのスクォークとスレプトンの質量を等しいと置くと，フレーバーが変化する過程の制限との矛盾は生じない．更に Q を無視すると，ポテンシャル (31.7.11) の超対称性を破る部分には唯一の複素パラメータ $\tilde{f}^0$ だけが存在し，超ポテンシャルの全体に掛かる位相の再定義によりこのパラメータを実数に選ぶことができる．したがって，ポテンシャルの超対称性を破る部分は CP 不変性の新たな破れを導入しない．しかし，Q が小さくなければならない理由は今のところ知られていない．

重力を媒介として超対称性が破れるこの第 1 の場合に生じる別の深刻な問題は，これが十分に大きなゲージーノの質量を生成しないことだ[18]．(31.6.75) によると，$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ゲージーノの質量行列は樹木近似で，

$$m_{AB} = \exp(\kappa^2 d/2) \sum_{NM} [g^{-1}]_{NM} L_N \left(\frac{\partial f_{AB}}{\partial \varphi_M} \right)^* \tag{31.7.13}$$

と与えられる．ここで φ_N は全てのスカラー場 ϕ_r と z_k を表しており，f_{AB} はこれらに依存している．また g_{NM} と L_M は (31.6.66) と (31.6.69) で与えられる．ここで行なった評価によると $\kappa^2 d = O(\kappa^2 \Lambda^2) \ll 1$ であ

り, $L_k = O(\Lambda^2)$ だ. 一方 L_r はそれよりずっと小さく, g^{-1}_{kl} は大きさ 1 の程度だ. また, f_{AB} は大きさ 1 の程度の項と大きさ κ^2 程度の項にスカラー場とその複素共役の双線形を掛けたものとの和なので, $\partial f_{AB}/\partial z_k$ は大きさ $\kappa^2\Lambda$ 程度だ. これはゲージーノに大きさ $\Lambda^2 \times \kappa^2\Lambda$ の質量を与える. これはグラヴィティーノの質量 (これは観測可能セクターのスカラー場のポテンシャル (31.7.11) における超対称性の破れのスケールを定める) $m_g \approx \kappa\Lambda^2$ よりも大きさ $\kappa\Lambda \approx 10^{-7}$ の因子だけ小さい. したがって, 超対称性の破れによって生じるスカラーの質量が大きさ 1TeV の場合は, ゲージーノの質量は大きさ 100keV となる. これは小さすぎて, ゲージーノがまだ観測されていないという事実と矛盾する.

この問題を避けるためにいくつかの方法がある. 一つは f_{AB} において線形に現れるゲージ 1 重項のスカラー場を隠れたセクターの z_k 内に含めることだ[19]. この場合 $\partial f_{AB}/\partial z_k$ は大きさ $\kappa^2\Lambda$ ではなく κ であり, スクォークやスレプトンの質量と比較されるべき大きさ $\kappa\Lambda^2$ の質量をゲージーノに与える. このアプローチの一つの問題点は, 全てのゲージ群に関して中性なスカラーを含めると, 超ポテンシャルのくりこみ可能な部分が $f(\phi) + \tilde{f}(z)$ という形になることがもはや自然ではなくなることだ.

たとえゲージ 1 重項が無くても, グルーイーノ, ウィーノ, ビーノの質量への 1 ループの寄与 (そして A パラメータに対しての寄与) が存在し, これは 31.4 節で計算されている. 例えば, m_g を 28.1 節で議論した「自然さ」の制限から許される最も大きい値 $\approx$ 10TeV にとると, $g_s^2/4\pi = 0.118$ としたとき, (31.4.13) からグルーイーノの質量は $3g_s^2 m_g/16\pi^2 = 280\text{GeV}$ となり, これはグルーイーノが検出されないためには十分大きな値であることは確かだ. ビーノとウィーノの質量は μ パラメータと擬スカラー・ヒッグス質量 m_A との比に依存しているが, この比の値は今のところ知られていない. この比を 1 に等しいととり, $m_g < 10\text{TeV}$ とすると, (31.4.15) と (31.4.16) から $m_{ビーノ} =$

$9g'^2 m_g/16\pi^2 < 73\text{GeV}$ と $m_{ウィーノ} = g^2 m_g/16\pi^2 < 27\text{GeV}$[19a] が得られる. ウィーノの質量についてのこの制限は, W ボゾン対を生み出すのに十分な高エネルギーで行われたLEPの $e^+ - e^-$ 衝突でウィーノの対が見られなかったという事実, つまり $m_{ウィーノ} > m_W$ と矛盾する. この矛盾を回避するには, 自然さの観点からはきわどい $m_g > 30\text{TeV}$ ととるか, あるいは $\mu^2/m_A^2 > 8$ ととることが必要[11b] だ. とにかく, スクォークやスレプトンよりもゲージーノの方がずっと軽いという一般的な結果をこの模型は持っている.

多項式 $Q(\phi, \phi^*)$ が無視できる場合, 31.4節で示したように A パラメータもまた1ループ補正により得られる. これらのパラメータはスクォークについて大きさ $g_s^2 m_g/16\pi^2$ であり, スレプトンについて $g^2 m_g/16\pi^2$ あるいは $g'^2 m_g/16\pi^2$ となる.

第2の場合[20]

重力を媒介として超対称性が破れる第2の場合は, ちょうど第1の場合と同じように, カイラル超場 Φ_r を含む観測可能セクターと, カイラル超場 Z_k を含む隠れたセクターを持つ. 両者の差は今の場合, 超対称性が隠れたセクターで自発的に破れないと仮定している点だ. その代わりに, 隠れたセクターでのゲージ結合定数は, エネルギー $\Lambda \ll m_{\text{Pl}}$ で強くなるが, それらが超場の第3のセクターにあるスカラー場, つまり**モジュラー超場**についての非摂動論的な超ポテンシャルを生成する. 最近の超弦理論のような様々な理論では余分な次元が存在し, それらは大雑把にいって大きさ κ のちっぽけなコンパクト多様体へと「巻取られ」観測されない. 通常このコンパクト多様体を記述するのに必要なパラメータのいくつかは, 摂動論のどの次数でも決まらない. これらのパラメータの値は4次元時空の各点毎に変化してもよく, プランク・スケール κ^{-1} よりずっと下のエネルギーで**モジュラー場**と呼ば

れるゲージ不変なスカラー場y_aとして現れる．(ここでの添字a, b等はもちろん31.6節で使われた局所ローレンツ系の添字とは関係ない.)余分な次元をコンパクト化する際に超対称性が破れないと仮定すると, これらの場はフェルミオン的な超対称パートナーと補助場を伴っていなければならない．これらは, まとまってゲージ不変な左カイラル・モジュラー超場Y_aとそれらの随伴[†]をなす.

コンパクト化のスケールのすぐ下では, 全ての超場に依存できる超ポテンシャルを持った超対称性理論が存在し, その場合はκが唯一の次元を持つパラメータだ．コンパクト化したとき, モジュラー超場Y_aのみの超ポテンシャルは生じないので, y_aが摂動論では決定されない状況が典型的に現れる．28.1節で見たように$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ゲージ対称性は, ヒッグス超場$H_1$と$H_2$について双線形の可能な項を除き, 観測可能セクターの超場の因子をちょうど一つあるいは二つ持つ超ポテンシャルの任意の項を排除する．裸の超ポテンシャル内にこの双線形項はたまたま存在しないか(その場合, 摂動論のどの次数でも現れない) あるいは何らかの対称性, 例えば23.6節で強いCPの破れと関連して議論した「ペッチェイ・クイン」対称性により排除されると再び仮定しよう．隠れたセクターのゲージ対称性は, Z_kの因子をちょうど一つ持つ超ポテンシャル内の任意の項を排除するので, 偶然性, または何らかの対称性(おそらく同じペッチェイ・クイン対称性)がまた, Z_kの二つの因子を持つ項を排除すると仮定しよう.

したがって, 裸の超ポテンシャルは,

$$f_{\text{bare}}(\Phi, Y, Z) = \sum_{rst} f_{rst}(\kappa Y)\,\Phi_r \Phi_s \Phi_t + \sum f_{klm}(\kappa Y) Z_k Z_l Z_m + \cdots \tag{31.7.14}$$

の形となる．ここでf_{rst}とf_{klm}は, その引数についての冪級数であり,

[†]重力を媒介として超対称性が破れる第1の場合の仮定の下でもモジュラー場はもちろん存在し得るが, その場合はΛの値が小さいのでモジュラー場の結合が弱すぎて興味の対象とはならない.

その係数は大雑把に言って大きさ 1 の程度だ. 点々は κY_a の任意個の因子, および Φ と Z について $n(>3)$ 個の因子を含む項を表しており, κ^{n-3} に比例する因子だけ小さくなっている.

「ゲージーノ凝縮」(ゲージーノ場の双線形関数の期待値が現れること) のような隠れたセクターでの非摂動論的効果それ自身は, 超対称性を破ることなくモジュラー超場の超ポテンシャルを生成すると仮定する. Λ は今の問題での唯一のスケールなので ($\kappa\Lambda$ の因子によって抑えられる重力の効果はさておき), この超ポテンシャルは,

$$\hat{f}(Y) = \Lambda^3 F(\kappa Y) \tag{31.7.15}$$

の形でなければならないだろう. そのような項はまた, (31.7.14) における Z^3 項にある Z 超場のスカラー成分の期待値により生成され得る. 同時に (31.7.14) の点々で表されているくりこみ可能でない項において, Z_k をスカラー成分の期待値で置き換えると, Φ 依存性を持つ付加的な項が有効超ポテンシャルに生じる. それについては更に後ほど述べる. 超ポテンシャル (31.7.15) は, 重力を媒介として超対称性が破れる理論で元々仮定したとおり (31.7.1) の形をしているが, 今の場合 ϵ を, 隠れたセクターでのゲージ相互作用が強くなる中間のスケール Λ と同一視したものになっている.

モジュラー・カイラル超場の $\mathcal{F}$ 項の出現により, 超ポテンシャル (31.7.15) が超対称性の破れを引き起こし得るというのはもっともらしい. 暫くの間, 他の超場は無視するが, 後ほどその正当化をすることにしよう. モジュラー・スカラーについてのポテンシャルは, (31.6.68) と (31.6.69) より,

$$\hat{V}(y, y^*) = \exp\left(\kappa^2 \hat{d}(y, y^*)\right)\left[\sum_{ab}[\hat{g}^{-1}(y, y^*)]_{ab}\hat{L}_a(y)\hat{L}_b(y)^* \right.$$
$$\left. -3\kappa^2|\hat{f}(y)|^2\right] \tag{31.7.16}$$

と与えられる．ここで $\hat{d}(y, y^*)$ は, Z_k と Φ_r のスカラー成分を無視した場合のケーラー d 関数であり,

$$\hat{g}_{ab} = \frac{\partial^2 \hat{d}}{\partial y_a \partial y_b^*} , \tag{31.7.17}$$

$$\hat{L}_a = \frac{\partial \hat{f}}{\partial y_a} + \kappa^2 \hat{f} \frac{\partial \hat{d}}{\partial y_a} \tag{31.7.18}$$

となっている．ここでは $\hat{V}$ は, 上付きの添字 0 をつけた停留点を持つと仮定している．ここで $\hat{L}_a^0 \neq 0$ なので超対称は破れるが, $\hat{V}^0$ は非常に小さく, 観測可能セクターから現れる項を使って消すことができ, 平坦な時空が残る．$\hat{f}$ は (31.7.15) の形をしており, $\hat{d}$ は κ^{-2} に κy_a と κy_a^* の冪級数を掛けたものに等しく, 係数は大きさ 1 の程度なので, 全ポテンシャルは $\kappa^2 \Lambda^6$ に κy_a と κy_a^* の冪級数を掛けた形をしており, 再び係数は大きさ 1 の程度となる．したがって, ポテンシャルにおける様々な構成要素の次数は次のようになる．

$$\begin{aligned} & y_a^0 = O(\kappa^{-1}) \,, \quad \hat{f}^0 = O(\Lambda^3) \,, \quad \hat{d}^0 = O(\kappa^{-2}) \,, \\ & \hat{L}_a^0 = O(\kappa \Lambda^3) \,, \quad \hat{g}_{ab}^0 = O(1) \,. \end{aligned} \tag{31.7.19}$$

モジュラー・セクター場と隠れたセクター場をその期待値で置き換えて考えると, 観測可能セクターの超ポテンシャルは,

$$f(\Phi) = \sum_{rs} \mu_{rs} \Phi_r \Phi_s + \sum_{rst} g_{rst} \Phi_r \Phi_s \Phi_t + \cdots \tag{31.7.20}$$

の形となる．ここで g_{rst} は $f_{rst}(\kappa y_0)$ であり, これは大雑把にいって大きさ 1 の程度であり, $\kappa\Lambda$ の冪で抑えられる項が加わっている．ここで点々は, $\kappa\Phi$ の付加的な因子によって抑えられる 4 個以上の Φ 因子を持つ項を表している．係数 μ_{rs} は, (31.7.14) の点々で表されているくりこみ可能でない項から現れる．この係数が Z について $n(> 1)$ 個の因子

を持ち, 同時にΦについて2個の因子を持つ項から現れる場合は, μ_{rs}は,

$$\mu_{rs} = O(\kappa^{n-1}\Lambda^n) \tag{31.7.21}$$

の程度の大きさを持つ. μの望ましい大きさは$m_g = O(\kappa^2\Lambda^3)$であることを見てみよう. これは$Z$について$n = 3$個の因子を持つ項から現れる.

モジュラー・セクターにおける超対称性の破れは, 重力場とその超対称パートナーの効果によって観測可能セクターへと伝えられる. (31.6.68)から観測可能セクターのポテンシャルは,

$$\begin{aligned}
V_O = e^{\kappa^2 d^0}\Bigg[&\sum_{rs}[g^{0\ -1}]_{rs}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_r} + \kappa^2(f+\hat{f}^0)\frac{\partial d^0}{\partial\phi_r}\right)\\
&\times\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_s} + \kappa^2(f+\hat{f}^0)\frac{\partial d^0}{\partial\phi_s}\right)^*\\
&+2\,\mathrm{Re}\sum_{ra}[g^{0\ -1}]_{ra}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_r} + \kappa^2(f+\hat{f}^0)\frac{\partial d^0}{\partial\phi_r}\right)L_a^{0*}\\
&+\sum_{ab}[g^{0\ -1}]_{ab}\hat{L}_a^0\hat{L}_b^{0*} - 3\kappa^2\left|f+\hat{f}^0\right|^2\Bigg]\\
&+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{AB}[f_{AB}^{-1}]^0\left(\sum_{rs}\frac{\partial d^0}{\partial\phi_r}(t_A)_{rs}\phi_s\right)\\
&\times\left(\sum_{tu}\frac{\partial d^0}{\partial\phi_t}(t_A)_{tu}\phi_u\right)^*
\end{aligned} \tag{31.7.22}$$

と与えられる. ここで上付き添字ゼロは再びモジュラー・セクターのスカラー場と隠れたセクターのスカラー場を, それらの平衡点での値に置き換えていることを表している. (これは後で再び考える.) (31.7.22)はモジュラー・セクターに現れる$\hat{L}_a^0$のような項を含んでいるが, ここでは隠れたセクターに陽に関連する項は存在しないことに注意しよう. なぜなら, 重力を媒介として超対称性が破れるこの第2の場合で

は, 超対称性はこのセクターでは破れないと仮定しているので, 隠れたセクターの場と相互作用する任意のゲージ場について $L_k^0 = 0$ かつ $D_A^0 = 0$ だからだ.

観測可能セクターの場が大きさ $\kappa^2\Lambda^3$ となるような場の空間の領域を調べることに興味がある. なぜなら, あとで見るように, これは隠れたセクターにおいて超対称性が破れた場合の重力の効果によって, 観測可能セクターに生じる特徴的な質量だからだ. (31.6.48) とここでの評価 $\hat{f}^0 \approx \Lambda^3$ によると, この質量はまたグラヴィティーノの質量 m_g 程度の大きさだ. つまり,

$$m_g \approx \kappa^2\Lambda^3$$

と評価される.

この大きさの場についてポテンシャルを計算するために, 観測可能スカラー場とモジュラー・スカラー場についてのケーラー d 関数が,

$$\begin{aligned} d(\phi, \phi^*, y, y^*) = \kappa^{-2}\hat{d}(\kappa y, \kappa y^*) &+ \sum_{rs} \phi_r \phi_s^* A_{rs}(\kappa y, \kappa y^*) \\ &+ \sum_{rs} \phi_r \phi_s B_{rs}(\kappa y, \kappa y^*) \\ &+ \sum_{rs} \phi_r^* \phi_s^* B_{rs}^*(\kappa y, \kappa y^*) + \cdots \end{aligned} \tag{31.7.23}$$

の形をとることに注意しよう. ここで $\hat{d}$, A_{rs}, B_{rs} はその引数についての冪級数であり, 係数の大きさは 1 程度であり, 点々は ϕ あるいは ϕ^* の因子を $n(> 2)$ 個持つ項を表しており, 因子 κ^{n-2} だけ小さくなっている. (31.6.72) により, 全超ポテンシャルに適切な正則因子を掛けることにより d における正則項とその複素共役を取り除くことができる. 特に, 全超ポテンシャルに因子 $\exp[\kappa^2\hat{d}^0 + \kappa^2\sum_{rs} B_{rs}^0 \phi_r \phi_s]$ を掛けることにより, 変換された d 関数が,

$$\hat{d}^0 = 0\,, \quad B_{rs}^0 = 0 \tag{31.7.24}$$

を満たすようにできる．既にこうなっていると仮定しよう．全超ポテンシャルは大きさΛ^3の定数項$\hat{f}^0$を含んでおり，B^0_{rs}は大きさ1の程度だったので，この変換によりϕ_rについて2次の項が超ポテンシャル内に生じ，ϕおよびm_gと同じ程度の大きさ，すなわち大きさ$\kappa^2\Lambda^3$の寄与を係数μ_{rs}に及ぼす．

この係数には大きさが同じ程度の別の寄与が存在し得る．それはΦの因子を2個もち，さらにYの因子を$n(>1)$個持つ超ポテンシャル内の項から現れる．(31.7.21)から，係数μ_{rs}へのここからの寄与がまた大きさ$\kappa^2\Lambda^3$となるには，$n=3$でなければならないと分かる．H_1とH_2にペッチェイ・クイン量子数+1を与え，Yに量子数$-2/3$を与えることにより，$n=3$は許されるが，Φの因子2個とYの因子$n=2$個が禁止されるようにすることができる．Y_kの真空期待値によって，このペッチェイ・クイン対称性が破れると，アクシオンが生じる．

μ_{rs}を大きさ$\kappa^2\Lambda^3$にとると，観測可能セクターの超ポテンシャルにおける双線形な項と3次線形な項は共に大きさ$\kappa^6\Lambda^9$となる．通常の超対称性ポテンシャル項$\sum_r |\partial f/\partial\phi_r|^2$は，このとき大きさ$\kappa^8\Lambda^{12}$となり，(31.7.22)においてこの大きさか，あるいはそれ以上の大きさの全ての項を集めなければならない．

ϕ_rを大きさ$\kappa^2\Lambda^3$にとり，y_aを平衡値$y^0_a \approx \kappa^{-1}$に固定すると，(31.7.23)は，

$$g^0_{rs} = A^0_{rs} + O(\kappa^3\Lambda^3)\,, \tag{31.7.25}$$

$$g^0_{ab} = \left(\frac{\partial^2 \hat{d}}{\partial y_a \partial y^*_b}\right)^0 + \sum_{rs}\phi_r\phi^*_s\left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a \partial y^*_b}\right)^0 + \sum_{rs}\phi_r\phi_s\left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a \partial y^*_b}\right)^0 + \sum_{rs}\phi^*_r\phi^*_s\left(\frac{\partial^2 B^*_{rs}}{\partial y_a \partial y^*_b}\right)^0 + O(\kappa^6\Lambda^6)\,, \tag{31.7.26}$$

$$g^0_{ra} = \sum_s \phi_s\left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y^*_a}\right)^0 + O(\kappa^6\Lambda^6) = {g^0_{ar}}^* \tag{31.7.27}$$

を与える．ここで再び上付き添字ゼロは，y_a がその平衡値 y_a^0 に固定されていることを表している．観測可能セクターの超場 Φ_r とモジュラー超場 Z_a に別々の線形変換を施して，

$$A_{rs}^0 = \delta_{rs} \ , \quad \left(\frac{\partial^2 \hat{d}}{\partial y_a \partial y_b^*} \right)^0 = \delta_{ab} \tag{31.7.28}$$

となるように設定する．計量 (31.7.25)–(31.7.27) が単位行列と 1 よりずっと小さい項とを足したものとして与えられているとすると，以下のように逆を計算するのは容易だ．

$$g_{rs}^{0\ -1} = \delta_{rs} + O(\kappa^3 \Lambda^3) \ , \tag{31.7.29}$$

$$g_{ab}^{0\ -1} = \delta_{ab} - \sum_{rs} \phi_r \phi_s^* \left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*} \right)^0 - \sum_{rs} \phi_r \phi_s \left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*} \right)^0$$
$$- \sum_{rs} \phi_r^* \phi_s^* \left(\frac{\partial^2 B_{rs}^*}{\partial y_a \partial y_b^*} \right)^0 + O(\kappa^6 \Lambda^6) \ , \tag{31.7.30}$$

$$g_{ra}^{0\ -1} = - \sum_s \phi_s \left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a^*} \right)^0 + O(\kappa^6 \Lambda^6) = g_{ar}^{0\ -1\ *} \ . \tag{31.7.31}$$

特に関数 A_{rs} と B_{rs} の形についての仮定から，大きさの評価

$$\left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*} \right)^0 = O(\kappa^2) \ , \quad \left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*} \right)^0 = O(\kappa^2) \ , \quad \left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a^*} \right)^0 = O(\kappa) \ , \tag{31.7.32}$$

が得られる．そこで $\phi_r = O(\kappa^2 \Lambda^3)$ に対して，

$$[g^{0\ -1}]_{rs} = O(1) \ , \quad [g^{0\ -1}]_{ab} = O(1) \ , \quad [g^{0\ -1}]_{ra} = O(\kappa^3 \Lambda^3) \tag{31.7.33}$$

となる．更に，

$$f = O(\phi^3) = O(\kappa^6 \Lambda^9) \ , \quad \frac{\partial f}{\partial \phi_r} = O(\phi^2) = O(\kappa^4 \Lambda^6) \tag{31.7.34}$$

かつ，

$$\frac{\partial d^0}{\partial \phi_r} = O(\phi) = O(\kappa^2 \Lambda^3) \tag{31.7.35}$$

となる．$\hat{f}^0$ を大きさ Λ^3 とすると，(31.7.22) の量 $\kappa^2(f+\hat{f}^0)\partial d/\partial\phi_r$ では $\kappa^2\hat{f}^0\phi_r^*$ が主要項で，その大きさは $\kappa^2\times\Lambda^3\times\kappa^2\Lambda^3=\kappa^4\Lambda^6$ だ．これは $\partial f/\partial\phi_r$ と同じ程度の大きさなので，主要な次数では，両方の項

$$\frac{\partial f}{\partial\phi_r}+\kappa^2(f+\hat{f}^0)\frac{\partial d}{\partial\phi_r}\simeq\frac{\partial f}{\partial\phi_r}+\kappa^2\hat{f}^0\,\phi_r^*=O(\kappa^4\Lambda^6) \qquad (31.7.36)$$

を拾わなければならない．この近似では，$g^{0\ -1}_{rs}$ をその主要な項 δ_{rs} で置き換えると，(31.7.22) の角括弧内の第 1 項は既に望ましい大きさ $\kappa^8\Lambda^{12}$ なので，これらの近似を使って，

$$\sum_{rs}[g^{0\ -1}]_{rs}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_r}+\kappa^2(f+\hat{f}^0)\frac{\partial d^0}{\partial\phi_r}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_s}+\kappa^2(f+\hat{f}^0)\frac{\partial d^0}{\partial\phi_s}\right)^*$$
$$\simeq\sum_r\left|\frac{\partial f}{\partial\phi_r}+\kappa^2\hat{f}^0\,\phi_r^*\right|^2 \qquad (31.7.37)$$

と書いても良い．(31.7.22) の角括弧の第 2 項は大きさ $\kappa^3\Lambda^3\times\kappa^4\Lambda^6\times\kappa\Lambda^3=\kappa^8\Lambda^{12}$ なので，これを主要な項のみを使って評価してもよく，

$$2\mathrm{Re}\sum_{ra}[g^{0\ -1}]_{ra}\left(\frac{\partial f}{\partial\phi_r}+\kappa^2(f+\hat{f}^0)\frac{\partial d^0}{\partial\phi_r}\right)\hat{L}_a^{0*}$$
$$\simeq-2\mathrm{Re}\sum_{ras}\phi_s\left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a^*}\right)^0\left[\frac{\partial f}{\partial\phi_r}+\kappa^2\hat{f}^0\,\phi_r^*\right]\hat{L}_a^{0\,*} \qquad (31.7.38)$$

が分かる．(31.7.22) の角括弧の第 3 項と第 4 項は，それぞれ大きさ $\kappa^2\Lambda^6$ となるが，ほとんど打ち消し合うと仮定しており，角括弧内の量への寄与を評価する際に，主要でない項を含めなければならない．寄与の一つは，$g^{0\ -1}_{ab}$ の表式 (31.7.30) において ϕ あるいは ϕ^* に関して 2 次の項から来る．つまり，この寄与は大きさ $\kappa^2\phi^2\times(\kappa\Lambda^3)^2$ であり，これは大きさ $\kappa^8\Lambda^{12}$ だ．(31.7.22) の角括弧内の最後の項からポテンシャルへの別の打ち消し合わない寄与があり，それは f と $\hat{f}^0$ の間の干渉からやってくる．これは大きさ $\kappa^2\phi^3\Lambda^3$ の寄与をし，これもまた大きさ $\kappa^8\Lambda^{12}$ だ．$\phi_r=0$ の場合は，(31.7.22) の角括弧の最後の 2 項が打ち消

し合わない可能性があり，その場合は定数の寄与$\mathcal{C}$がある．大きな宇宙項を避けるために$\mathcal{C}$はまた大きさ$\kappa^8\Lambda^{12}$であると仮定しなければならない．(これは不自然な微調整であるが，巨大宇宙項を避けるあらゆる理論で今まで必要とされていた.) これらの評価を併せると，$\kappa^8\Lambda^{12}$の大きさまでで(31.7.22)の角括弧の最後の 2 項は，

$$\sum_{ab}[g^{-1}_{ab}]^0\hat{L}^0_a\hat{L}^{0*}_b - 3\kappa^2\left|f+\hat{f}^0\right|^2 \simeq -\sum_{abrs}\left[\phi_r\phi^*_s\left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a\partial y^*_b}\right)^0 + \phi_r\phi_s\left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a\partial y^*_b}\right)^0 + \phi^*_r\phi^*_s\left(\frac{\partial^2 B^*_{rs}}{\partial y_a\partial y^*_b}\right)^0\right]\hat{L}^0_a\hat{L}^{0\,*}_b - 6\kappa^2\mathrm{Re}\,(f\,\hat{f}^{0\,*}) + \mathcal{C} \tag{31.7.39}$$

となる．これらの項は全て望ましい大きさ$\kappa^8\Lambda^{12}$であるが，(31.7.24)から$\kappa^2 d^0 = O(\kappa^2\phi^2) = O(\kappa^6\Lambda^6)$が得られ，(31.7.22)における因子$\exp(\kappa^2 d^0)$を無視することができる．最後に，(31.7.22)の最後の行のゲージ項は，大きさ$\phi^4 = O(\kappa^8\Lambda^{12})$であり，これらは$\partial d^0/\partial\phi_r$における主要項$\phi^*_r$を使って評価することができる．

これを全て併せると，観測可能セクターにおける大きさ$\kappa^8\Lambda^{12}$の完全なスカラーポテンシャルは，

$$V_O \simeq \sum_r\left|\frac{\partial f}{\partial\phi_r} + \kappa^2\hat{f}^0\,\phi^*_r\right|^2 - 2\mathrm{Re}\sum_{ras}\phi_s\left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y^*_a}\right)^0\left[\frac{\partial f}{\partial\phi_r} + \kappa^2\hat{f}^0\,\phi^*_r\right]\hat{L}^{0\,*}_a - \sum_{abrs}\left[\phi_r\phi^*_s\left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a\partial y^*_b}\right)^0 + \phi_r\phi_s\left(\frac{\partial B_{rs}}{\partial y_a\partial y^*_b}\right)^0 + \phi^*_r\phi^*_s\left(\frac{\partial B^*_{rs}}{\partial y_a\partial y^*_b}\right)^0\right]\hat{L}^0_a\hat{L}^{0\,*}_b - 6\kappa^2\mathrm{Re}\,(f\,\hat{f}^{0\,*}) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\sum_{AB}[f^{-1}_{AB}]^0\left(\sum_{rs}\phi^*_r(t_A)_{rs}\phi_s\right)$$

$$\times \left(\sum_{tu} \phi_t^* (t_B)_{tu} \phi_u \right)^* + \mathcal{C} \tag{31.7.40}$$

となる．観測可能セクターのスカラー場のポテンシャル(31.7.40)は，28.4節で議論した最小超対称標準模型で仮定した形をとる．つまり，超対称項V_{susy}と軟らかい超対称性の破れの項$V_{\text{軟}}$の和

$$V_O = V_{\text{susy}} + V_{\text{軟}} \tag{31.7.41}$$

となる．超対称項は通常のように，

$$V_{\text{susy}} = \sum_r \left| \frac{\partial f}{\partial \phi_r} \right|^2 + \frac{1}{2} \text{Re} \sum_{AB} [f_{AB}^{-1}]^0 \left(\sum_{rs} \phi_r^* (t_A)_{rs} \phi_s \right) \times \left(\sum_{tu} \phi_t^* (t_B)_{tu} \phi_u \right)^* \tag{31.7.42}$$

であり，軟らかい超対称性の破れの項は，ここでは，

$$\begin{aligned} V_{\text{軟}} \simeq\ & 2\kappa^2 \text{Re} \sum_r \left(\phi_r \frac{\partial f}{\partial \phi_r} \hat{f}^{0\,*} \right) + \kappa^4 \left| \hat{f}^0 \right|^2 \sum_r |\phi_r|^2 \\ & - 2\text{Re} \sum_{ras} \phi_s \left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a^*} \right)^0 \left[\frac{\partial f}{\partial \phi_r} + \kappa^2 \hat{f}^0 \phi_r^* \right] \hat{L}_a^{0\,*} \\ & - \sum_{abrs} \left[\phi_r \phi_s^* \left(\frac{\partial A_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*} \right)^0 + \phi_r \phi_s \left(\frac{\partial B_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*} \right)^0 \right. \\ & \left. + \phi_r^* \phi_s^* \left(\frac{\partial B_{rs}^*}{\partial y_a \partial y_b^*} \right)^0 \right] \hat{L}_a^0 \hat{L}_b^{0\,*} \\ & - 6\kappa^2 \text{Re} \left(f\, \hat{f}^{0\,*} \right) + \mathcal{C} \end{aligned} \tag{31.7.43}$$

となる．(31.7.20)で与えられる$f(\phi)$を使うと，これは，

$$V_{\text{軟}} = \sum_{rs} M_{rs}^2 \phi_r \phi_s^* + 2\text{Re} \sum_{rs} N_{rs}^2 \phi_r \phi_s + 2\text{Re} \sum_{rst} A_{rst} \phi_r \phi_s \phi_t + \mathcal{C} \tag{31.7.44}$$

の形となる．ここで，

$$M_{rs}^2 = \kappa^4 |\hat{f}^0|^2 \delta_{rs} - 2\kappa^2 \mathrm{Re}\left[\hat{f}^0 \sum_a \left(\frac{\partial A_{sr}}{\partial y_a^*}\right)^0 \hat{L}_a^{0\,*}\right]$$
$$-\sum_{ab}\left(\frac{\partial^2 A_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 \hat{L}_a^0 \hat{L}_b^{0\,*}\,, \tag{31.7.45}$$

$$N_{rs}^2 = 2\kappa^2 \mu_{rs} \hat{f}^{0\,*} - \frac{1}{2}\sum_{at}\mu_{tr}\left(\frac{\partial A_{ts}}{\partial y_a^*}\right)^0 \hat{L}_a^{0\,*} - \frac{1}{2}\sum_{at}\mu_{ts}\left(\frac{\partial A_{tr}}{\partial y_a^*}\right)^0 \hat{L}_a^{0\,*}$$
$$-\sum_{ab}\left(\frac{\partial^2 B_{rs}}{\partial y_a \partial y_b^*}\right)^0 \hat{L}_a^0 \hat{L}_b^{0\,*}\,, \tag{31.7.46}$$

$$A_{rst} = -\sum_{au}\left[\left(\frac{\partial A_{ur}}{\partial y_a^*}\right)^0 g_{ust} + \left(\frac{\partial A_{us}}{\partial y_a^*}\right)^0 g_{urt}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial A_{ut}}{\partial y_a^*}\right)^0 g_{urs}\right]\hat{L}_a^{0\,*} \tag{31.7.47}$$

と定義した．我々の以前の次数の評価から，

$$M_{rs}^2 = O(\kappa^4\Lambda^6)\,,\quad N_{rs}^2 = O(\kappa^4\Lambda^6)\,,\quad A_{rst} = O(\kappa^2\Lambda^3) \tag{31.7.48}$$

が得られる．$V_{\rm susy}$ における定数についての我々の評価 $g_{rst} = O(1)$ と $\mu_{rs} = O(\kappa^2\Lambda^3)$ を併せると，ポテンシャルが，ある $\phi_a^0 \neq 0$ で停留点を持つときは，$\phi_a^0 = O(\kappa^2\Lambda^3)$ となり，この大きさの場を調べようとした我々の判断が正しいことが分かる．この大きさの ϕ_r の平衡値に対して，ポテンシャルにおける様々な項の平衡値は $O(\phi^4) = O(\kappa^8\Lambda^{12})$ となるので，これは真空のエネルギーを消去するために必要な定数 C の大きさとなる．

最小超対称標準模型での特徴的な質量 $\kappa^2\Lambda^3$ が大きさ 1TeV となるためには，$\Lambda \approx 10^{13}$GeV である必要がある．上で示されたように，裸の超ポテンシャルにおいて，観測可能セクターと隠れたセクターのそれぞれから来る二つの超場の因子を持つ項を禁止するのがペッチェイ・クイン対称性である場合は，隠れたセクターのスカラーの真空期待値は

この対称性を破り, (23.6節でMと呼んだ)対称性の破れを表すスケールは大きさ10^{13}GeVとなり, (23.6.26)により与えられるアクシオンの質量は大きさ10^{-6}eVとなる. 超対称性の破れのスケールを表すこの値は, 23.6節で引用した上限10^{12}GeVより若干上だが, 宇宙論の不確定性を考慮すると, このくい違いは決定的なものではない.

これらの結果の物理的意味を更に考える前に, これらを導くときにとった近道を再考するために一休みしよう. 観測可能セクターのスカラーϕ_rのポテンシャルを計算する際, 観測可能セクターの場ϕ_rが無い場合に存在する平衡値y_a^0にモジュラー場を固定した. そうする代わりに, ポテンシャル

$$V_{\text{total}}(\phi,\phi^*,y,y^*) = \hat{V}(y,y^*) + V_O(\phi,\phi^*,y,y^*) \qquad (31.7.49)$$

の平衡点を見つけ, モジュラー場をϕ_rの実際の値に対する平衡値$y_a(\phi)$に設定し, その後はじめてϕ_rの平衡値を探すべきだ. 興味ある場の場合, V_Oは$\hat{V}$よりもずっと小さいので, y_aの平衡値は,

$$y_a(\phi,\phi^*) = y_a^0 + \delta y_a(\phi,\phi^*) \qquad (31.7.50)$$

と書くことができる. ここでy_a^0は$\hat{V}(y,y^*)$を最小にする値であり,

$$\sum_b \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y_a \partial y_b}\delta y_b + \sum_b \frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial y_a \partial y_b^*}\delta y_b^* = -\frac{\partial V_O}{\partial y_a} \qquad (31.7.51)$$

となる. $\hat{V}$の2階微分は大きさ$\kappa^2 \times (\kappa\Lambda^3)^2 = \kappa^4\Lambda^6$だが, V_Oの1階微分は大きさ$\kappa \times \kappa^8\Lambda^{12} = \kappa^9\Lambda^{12}$なので, δy_aは大きさ$\kappa^5\Lambda^6$だ. y_aの平衡値をϕ依存性を持つようにずらしたとき, ポテンシャルの変化はδy_aとδy_a^*について2次となる. その係数は$\hat{V}$のy_aあるいはy_a^*についての2階微分により与えられ, したがって大きさ

$$(\kappa^5\Lambda^6)^2 \times \kappa^2 \times (\kappa\Lambda^3)^2 = \kappa^{14}\Lambda^{18}$$

となる．これはすでに計算したポテンシャルよりも因子 $(\kappa\Lambda)^6 \ll 1$ だけ小さい．

関数 $A_{rs}(y,y^*)$ と $B_{rs}(y,y^*)$ についてさらに仮定をしないと，(31.7.45)–(31.7.47) からは，軟らかい超対称性の破れのポテンシャル (31.7.44) における係数 M_{rs}^2，N_{rs}^2，A_{rst} の正確な値について何も得ることができない．これらの結果から現れる唯一の確固とした預言は，軟らかい超対称性の破れを記述するラグランジアン (28.4.1) において，一般に仮定したように係数 C_{ij} を全て無視できることだ．

結果 (31.7.44)–(31.7.48) によって与えられる最大の問題は，更なる仮定を置かないと，これらの結果からは，28.4 節で議論したクォークとレプトンのフレーバー変化過程を避けるためのスクォーク質量とスレプトン質量の縮退が保証されないことだ．軟らかい超対称性の破れのポテンシャル (31.7.44) における $\phi_r\phi_s$ 項と，超ポテンシャル (31.7.20) における $\phi_r\phi_s$ 項は，$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ によってヒッグス・スカラー以外のものに依存することが許されないので，それらはフレーバー変化過程を導くことができない．したがって問題は，(31.7.44) の係数 M_{rs}^2 と A_{rst} が湯川結合定数 g_{rst} と同じ理由でフレーバーを保存しないかもしれないという事実からのみ現れる．この問題を避けるための一つの方法は，何らかの理由により関数 $A_{rs}(y,y^*)$ がたまたま y_a と y_a^* のみに弱く依存すると仮定することだ．そうすると (31.7.45) から $M_{rs}^2 \propto \delta_{rs}$ が得られ，(31.7.47) は A_{rst} を (つまり (28.4.1) における係数 A_{ij} を) 異常に小さくする．別の可能性は，何らかの理由により全関数 $A_{rs}(y,y^*)$ (少なくとも $y_a = y_a^0$ での 1 階微分と 2 階微分) が，ゆっくりと変化するわけではないが，δ_{rs} に比例するという場合だ．この場合，(31.7.45) は再び $M_{rs}^2 \propto \delta_{rs}$ を与え，(31.7.47) は 3 次線形結合 $A_{rst} \propto g_{rst}$ を与える．このとき，(28.4.1) における係数 A_{ij} は全て等しい[21]．

重力を媒介として超対称性が破れるこの第 2 の場合，生成されるゲージーノの質量もまた確かめなければならない．(31.6.75) から $SU(3)\times$

$SU(2) \times U(1)$ ゲージーノの質量行列は一般に,

$$m_{AB} = \exp(\kappa^2 d/2) \sum_{NM} [g^{-1}]_{NM} L_N \left(\frac{\partial f_{AB}}{\partial \varphi_M} \right)^* \tag{31.7.52}$$

により与えられ, φ_N は f_{AB} が依存している全ての場を表している. また, g_{NM} と L_M は (31.6.66) と (31.6.69) により与えられる. ここで行なった $\kappa^2 d \ll 1$ という評価によると, L_a はモジュラー場 y_a について $L_a = O(\kappa\Lambda^3)$ であり, 他の場についてはこれよりずっと小さく, また $g^{-1}_{ab} \simeq \delta_{ab}$ だ. また, f_{AB} は κy の冪級数であり, 係数は大きさ 1 の程度だと仮定しているので, $\partial f_{AB}/\partial y_a$ は大きさが κ 程度となる. そこで ゲージーノの質量 (31.7.52) は大きさ $\kappa^2\Lambda^3$ となり, これはスカラーの質量および期待値の大きさと同じであり, したがって観測と矛盾するのを避けるには十分な大きさのように思われる. 31.4 節で考えた 1 ループ補正は, ここではずっと小さく, 考慮する必要がない.

まとめると, 重力を媒介として超対称性が破れる第 1 の場合は, 宇宙論からの制限内のアクシオン質量を与えることができる利点があるが, 第 2 の場合は, スクォークとスレプトンの質量と同程度のゲージーノの質量を与えることができる利点がある. 重力を媒介として超対称性が破れる両方の場合とも, ゲージを媒介として超対称性が破れる理論よりも有利な点が一つある. すなわち, それらの理論は実験的に必要な大きさの μ 項を自然に与える. 一方で, ゲージを媒介として超対称性が破れる理論は, 世代に依らないスクォークとスレプトンの質量を自然に与えるという利点を持っている.

重力を媒介として超対称性が破れるどちらの場合も, 理論はゆっくりと崩壊する非常に重い粒子の存在を自然に伴っている可能性があり, 天文学的な興味ある効果を持っているかもしれない[23]. エネルギー Λ で強くなる隠れたセクターのゲージ相互作用は, Λ 程度の質量の複合粒子を結合させることができるというのはもっともらしい. 隠れたセクターのラグランジアンにおけるくりこみ可能な部分の偶然的な対称

性によって, この非常に重い粒子の崩壊が禁止され, $\kappa\Lambda$の因子によって小さくなっているくりこみ可能でない項を通じてのみその崩壊が起こる場合は, これらの非常に重い粒子は長寿命かもしれない.

補遺：4脚場形式

物質場がスカラー, ベクトル, テンソルに制限されている理論では, 計量テンソル$g_{\mu\nu}$を用いる重力の良く知られた形式は, 十分に適切なものだ. しかし, 超重力理論の場合はスピノルが欠くことのできないものとして存在する. ベクトルやテンソルと違って, スピノルは任意の座標系への自然な一般化を持たないようなローレンツ変換則を持つ. そこでスピノルを扱うためには, $a = 0, 1, 2, 3$として座標系$\xi^a_X(x)$を導入しなければならない. この座標は, 任意の座標系の与えられた任意の点Xで局所慣性的なものだ. 等価原理から, これらの局所慣性座標で重力は何の効果も持たないことが分かる. したがって, 作用は, これらの局所慣性系で定義されるスピノル, ベクトル等の物質場を用いて書かれるのみならず, 局所慣性座標と一般座標の間の変換から現れる4脚場

$$e^a{}_\mu(X) \equiv \left.\frac{\partial \xi^a_X(x)}{\partial x^\mu}\right|_{x=X} \tag{31.A.1}$$

を用いて表現される. 作用は一般座標変換$x^\mu \to x'^\mu$かつ局所ローレンツ変換$\xi^a \to \xi'^a = \Lambda^a{}_b(x)\xi^b$ の下で不変だ. ここで$\Lambda^a{}_c(x)\Lambda^b{}_d(x)\eta_{ab} = \eta_{cd}$を満たす. 4脚場の定義(31.A.1)から一般座標変換$x \to x'$の下で, 4脚場は,

$$e^a{}_\mu(x) \to e'^a{}_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} e^a{}_\nu(x) \tag{31.A.2}$$

と変換されることが分かる. 一方, 局所ローレンツ変換$\xi^a(x) \to \Lambda^a{}_b(x)\xi^b(x)$の下で, 4脚場は,

$$e^a{}_\mu(x) \to \Lambda^a{}_b(x) e^b{}_\mu(x) \tag{31.A.3}$$

と変換されることが分かる.

例えば, 純粋な重力理論を, 局所ローレンツ変換の下で不変であり, 一般座標変換の下でテンソルとして変換する場, つまり計量

$$g_{\mu\nu} \equiv e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab} \tag{31.A.4}$$

を用いて表してもよい. ベクトルは局所ローレンツ変換の下でベクトル

$$V^a(x) \to \Lambda^a{}_b(x) V^b(x) \tag{31.A.5}$$

として変換するが一般座標変換の下でスカラーとして変換する量 V^a とみなしてもよいし, 局所ローレンツ変換の下でスカラーとして変換するが一般座標変換の下でベクトルして変換する量 v^μ とみなしてもよい. この二つは,

$$V^a = e^a{}_\mu v^\mu$$

によって関連している. しかし, 超重力の作用はまたスピノル場を含んでおり, それは一般座標変換の下ではスカラーのように変換するが, 局所ローレンツ変換の下ではスピノル

$$\psi_\alpha(x) \to D_{\alpha\beta}(\Lambda(x))\psi_\beta(x) \tag{31.A.6}$$

として変換する. ここで $D_{\alpha\beta}(\Lambda)$ は斉次ローレンツ群のスピノル表現を表している.

(31.A.5) と (31.A.6) のローレンツ変換は座標 x^μ に依存しているので, $V^a(x)$ あるいは $\psi_\alpha(x)$ のような量の時空微分は, 局所ローレンツ変換の下で同じ変換をするが, 一般座標変換の下で共変ベクトルとして変換するような別の量ではない. 例えば, (31.A.6) の微分は局所ローレンツ変換則

$$\partial_\mu \psi_\alpha \to D_{\alpha\beta}(\Lambda)\left\{\partial_\mu \psi_\beta + \left[D^{-1}(\Lambda)\partial_\mu D(\Lambda)\right]_{\beta\gamma}\psi_\gamma\right\}$$

を与える. 右辺の括弧内の第 2 項を消去するために, 局所ローレンツ変換則

$$\Omega_\mu \to D(\Lambda)\Omega_\mu D^{-1}(\Lambda) - \Big(\partial_\mu D(\Lambda)\Big)D^{-1}(\Lambda) \tag{31.A.7}$$

を持つ接続行列 Ω_μ を導入し, 共変微分を,

$$\mathcal{D}_\mu\psi \equiv \partial_\mu\psi + \Omega_\mu\psi \tag{31.A.8}$$

と定義する. これは局所ローレンツ変換の下で以下のように ψ 自身と同じ変換をする.

$$\mathcal{D}_\mu\psi \to D(\Lambda)\mathcal{D}_\mu\psi\ . \tag{31.A.9}$$

また, Ω_μ は一般座標変換の下で共変ベクトルのように変換しなければならず, $\mathcal{D}_\mu$ を座標スカラーに作用させると共変ベクトルが得られる. $\mathcal{D}_\mu$ をテンソルに作用させたときに, 下付きの添字を 1 個余分に持ったテンソルが得られるためには, 通常のアフィン接続項で補正してやらなければならない. 例えば, グラヴィティーノ場 ψ_μ に $\mathcal{D}_\mu$ を作用させるとき, 共変微分は,

$$\mathcal{D}_\mu\psi_\nu \equiv \psi_{\nu;\mu} + \Omega_\mu\psi_\nu \equiv \partial_\mu\psi_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\psi_\lambda + \Omega_\mu\psi_\nu \tag{31.A.10}$$

と定義される.

(31.A.8)–(31.A.10) はスピノルのみならず, 局所ローレンツ変換の下でローレンツ群の任意の表現 $D(\Lambda)$ に従って変換する場に対しても適用される. 行列 Ω_μ はこの表現に依存しているが, 任意の表現ではこれは,

$$[\Omega_\mu]_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}i[\mathcal{J}_{ab}]_{\alpha\beta}\omega^{ab}_\mu(x) \tag{31.A.11}$$

の形で書かれる. ここで $\mathcal{J}_{ab}$ は, 問題にしている場がなす表現での斉次ローレンツ群の生成子を表す行列だ. つまり, 生成子は,

$$i\,[\mathcal{J}_{ab}\,,\,\mathcal{J}_{cd}] = \eta_{bc}\mathcal{J}_{ad} - \eta_{ac}\mathcal{J}_{bd} + \eta_{bd}\mathcal{J}_{ca} - \eta_{ad}\mathcal{J}_{cb} \tag{31.A.12}$$

を満たし, ω_μ^{ab} は**スピン接続**として知られている表現に依らない場だ. この場は一般座標変換の下で共変ベクトルとして変換する. 非斉次局所ローレンツ変換則 (31.A.7) を満たすには,

$$\omega_\mu^{ab} = g^{\nu\lambda} e^a{}_\nu e^b{}_{\lambda\,;\,\mu} \tag{31.A.13}$$

ととらなければならず, セミコロンはアフィン接続 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ を使って構成できる通常の共変微分を再び表している. ((31.A.4) から $g^{\nu\lambda} e^a{}_\nu e^b{}_\lambda = \eta^{ab}$ となり, その共変微分はゼロとなるので, スピン接続 (31.A.13) は a と b について反対称だ.) これは (31.A.7) を満たす唯一のスピン接続ではない. つまり, このスピン接続に対して, 一般座標変換の下で共変ベクトルであり, 局所ローレンツ変換の下でテンソルである場を付け加えることができ, これは超重力理論で重要な自由度となっている.

スピン接続を選ぶと, 対応する曲率テンソルが存在する. (31.A.7) から量 $\partial_\nu\Omega_\mu - \partial_\mu\Omega_\nu + [\Omega_\nu, \Omega_\mu]$ は局所ローレンツ変換の下で,

$$\partial_\nu\Omega_\mu - \partial_\mu\Omega_\nu + [\Omega_\nu, \Omega_\mu] \to D(\Lambda)\left(\partial_\nu\Omega_\mu - \partial_\mu\Omega_\nu + [\Omega_\nu, \Omega_\mu]\right) D^{-1}(\Lambda) \tag{31.A.14}$$

と斉次に変換することを直接示すことができる. (31.A.11) と (31.A.12) を使うと, この行列は,

$$\partial_\nu\Omega_\mu - \partial_\mu\Omega_\nu + [\Omega_\nu, \Omega_\mu] = \tfrac{1}{2}\, i\, \mathcal{J}_{ab} R_{\mu\nu}{}^{ab} \tag{31.A.15}$$

と表される. ここで,

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} \equiv \partial_\nu \omega_\mu^{ab} - \partial_\mu \omega_\nu^{ab} + \omega_\nu^{ac} \omega_{\mu\;c}{}^{b} - \omega_\mu^{ac} \omega_{\nu\;c}{}^{b} \tag{31.A.16}$$

の定義を使った. (31.A.14) から $R_{\mu\nu}{}^{ab}$ は, 局所ローレンツ変換の下ではテンソルとして,

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} \to D(\Lambda)^a{}_c D(\Lambda)^b{}_d R_{\mu\nu}{}^{cd} \tag{31.A.17}$$

の変換をすることが分かる. また, これは明らかに一般座標変換の下ではテンソルとして,

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} \to \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} R_{\rho\sigma}{}^{ab} \tag{31.A.18}$$

の変換をする. したがって,

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = e^{a}{}_{\kappa}\, e^{b}{}_{\lambda}\, R_{\mu\nu}{}^{\kappa\lambda} \tag{31.A.19}$$

と書くことにより 4 階の座標テンソルを構成できる. このようにして構成されたテンソル $R_{\mu\nu}{}^{\kappa\lambda}$ は, 特定のスピン接続 ω^{ab}_{ν} に対応するリーマン・クリストッフェル曲率テンソルだ.

問題

1. アインシュタイン超場の成分について表式 (31.2.3)–(31.2.6) を導け.

2. 超対称性が破れていないと仮定する. 一般の散乱過程で非常にエネルギーが低いグラヴィティーノが放出される振幅を, グラヴィティーノが無い場合のこの過程の振幅を使ってどうやって計算するか示せ.

3. 局所超対称性変換 (31.6.1)–(31.6.6) の下で, 超重力作用 (31.6.11) が G の全次数で不変であることを確かめよ.

4. 一般化された D 成分 (31.6.40) が, 一般の局所超対称性変換の下でどう変化するかを計算せよ.

5. ラグランジアン密度 (31.6.49) のフェルミオン部分を計算せよ.

6. 修正されたケーラー・ポテンシャル $d(\Phi, \Phi^*) = \Phi^*\Phi$ と超ポテンシャル $f(\Phi) = M^2(\Phi + \beta)$ を持ち, 超重力と相互作用する 1 個の

カイラル・スカラー超場Φの理論を考える．ここでMとβは定数とする．古典的な場の方程式が平坦な時空解を持つようなβの値を捜せ．この解でϕの値はいくらか？

参考文献

1. P. Nath and R. Arnowitt, *Phys.Lett.***56B**, 177 (1975); B. Zumino, *Proceedings of the Conference on Gauge Theories and Modern Field Theories at Northeastern University, 1975*, R. Arnowitt and P. Nath 編 (MIT Press, Cambridge, MA, 1976). このアプローチはJ. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd edition (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992) により詳細に記述されている．

2. D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, and S. Ferrara, *Phys. Rev.* **D13**, 3214 (1976); S. Deser and B. Zumino, *Phys. Lett.* **62B**, 335 (1976); S. Ferrara, J. Scherk, and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 1035 (1976); S. Ferrara, F. Gliozzi, J. Scherk, and P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B117**, 333 (1976). これらの論文は*Supersymmetry*, S. Ferrara 編 (North Holland/World Scientific, Amsterdam/Singapore, 1987) に再録されている．このアプローチについての明瞭な記述はP. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, 2nd edition (World Scientific, Singapore, 1990) を見よ．

3. S. Ferrara and B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B134**, 301 (1978).

3 *a*. M. T. Grisaru and H. N. Pendleton, *Phys. Lett.* **67B**, 323 (1977).

4. K. Stelle and P. C. West, *Phys. Lett.* **74B**, 330 (1978); S. Ferrara

and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **74B**, 333 (1978). これらの論文は参考文献2の *Supersymmetry* に再録されている.

5. 例えば S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972) の12.5節を見よ.

6. 例えば参考文献5の *Gravitation and Cosmology* の式(12.4.3)を見よ.

7. 例えば参考文献5の *Gravitation and Cosmology* の10.1節を見よ.

7 *a* . W. Nahm, *Nucl. Phys.* **B135**, 149 (1978).

8. S. Coleman and F. de Luccia, *Phys. Rev.* **D21**, 3305 (1980).

9. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1776 (1982).

10. S. Deser and C. Teitelboim, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 249 (1977); M. Grisaru, *Phys. Lett.* **73B**, 207 (1978); E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **80**, 381 (1981).

11. W. Rarita and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **60**, 61 (1941).

11 *a* . L. Randall and R. Sundrum, *Nucl. Phys.* **B557**, 79 (1999). G. F. Giudice, M. Luty, R. Rattazzi, and H. Murayama, *JHEP* **12**, 027 (1998); A. Pomerol and R. Rattazzi, *JHEP* **05**,013 (1999). E. Katz, Y. Shadmi, and Y. Shirman, *JHEP* **08**, 015 (1999).

11 *b* . G. F. Giudice, M. Luty, R. Rattazzi, and H. Murayama, 参考文献11a.

12. K. Stelle and P. C. West, 参考文献 4; S. Ferrara and P. van Nieuwenhuizen, 参考文献4; E. Cremmer, B. Julia, J. Scherk, S. Ferrara, L. Girardello, and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.*

79B, 231 (1978); *Nucl. Phys.* **B147**, 105 (1979) (参考文献2の *Supersymmetry* に再録.); E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello, and A. Van Proeyen, *Phys. Lett.* **116B**, 231 (1982); *Nucl. Phys.* **B212**, 413 (1983) (参考文献2の *Supersymmetry* に再録).

13. S. Deser and B. Zumino, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1433 (1977). この論文は参考文献2の *Supersymmetry* に再録されている. また D. Z. Freedman and A. Das, *Nucl. Phys.* **B120**, 221 (1977) を見よ; P. K. Townsend, *Phys. Rev.* **D 15**, 2802 (1977).

13 *a* . E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas, and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett.* **133B**, 61 (1983). このアイデアに基づく模型の概説は A. B. Lahanas and D. V. Nanopoulos, *Phys. Rept.* **145**, 1 (1987) を見よ.

14. H. P. Nilles, *Phys. Lett.* **115B**, 193 (1982); A. Chamseddine, R. Arnowitt, and P. Nath, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 970 (1982); R. Barbieri, S. Ferrara, and C. A. Savoy, *Phys. Lett.* **119B**, 343 (1982); E. Cremmer, P. Fayet, and L. Girardello, *Phys. Lett.* **122B**, 41 (1983); L. Ibañez, *Phys. Lett.* **118B**, 73 (1982); H. P. Nilles, M. Srednicki, and D. Wyler, *Phys. Lett.* **120B**, 346 (1983); L. Hall, J. Lykken, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D27**, 2359 (1983); L. Alvarez-Gaumé, J. Polchinski, and M. B. Wise, *Nucl. Phys.* **B221**, 495 (1983). 上の論文は参考文献2の *Supersymmetry* に再録されている. また S. Ferrara, D. V. Nanopoulos, and C. A. Savoy, *Phys. Lett.* **12B**, 214 (1983); J. M. Leon, M. Quiros, and M. Ramon Medrano, *Phys. Lett.* **127B**, 85 (1983); *Phys. Lett.* **129B**, 61 (1983); N. Ohta, *Prog. Theor. Phys.* **70**, 542 (1983); P. Nath, R. Arnowitt, and A. Chamseddine, *Phys. Lett.* **121B**, 33 (1983); J. Ellis, D. V. Nanopoulos, and K. Tamvakis, *Phys.*

Lett. **121B**, 123 (1983) を見よ. 概説は H. P. Nilles, *Phys. Rept.* **110**, 1 (1984) を見よ.

15. カイラル・スカラーについての観測されないセクターを持った超重力理論における超対称性の破れは, J. Polonyi (1977) による未出版のプレプリント University of Budapest preprint によって最初に提案されたように思われる.

16. I. Affleck, M. Dine, and N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B256**, 557 (1985).

17. G. F. Giudice and A. Masiero, *Phys. Lett.* **B206**, 480 (1988). また J. A. Casas and C. Muñoz, *Phys. Lett.* **B306**, 288 (1993) ; J. E. Kim, *Phys. Lett.* **B452**, 255 (1999) を見よ.

18. M. Dine and D. A. MacIntire, *Phys. Rev.* **D46**, 2594 (1992).

19. T. Banks, D. B. Kaplan, and A. Nelson, *Phys. Rev.* **D49**, 779 (1994); K. I. Izawa and T. Yanagida, *Prog. Theor. Phys.* **94**, 1105 (1995); A. Nelson, *Phys. Lett.* **B369**, 277 (1996).

19 *a* . ビーノより軽いウィーノが宇宙論的に示唆することは T. Moroi and L. Randall, *Nucl. Phys.* **B570**, 455 (2000) によって議論されている.

20. V. Kaplunovsky and J. Louis, *Phys. Lett.* **B306**, 269 (1993); *Nucl. Phys.* **B422**, 57 (1994). この種の特定の模型は P. Binétruy, M. K.Gaillard, and Y-Y. Wu, *Nucl. Phys.* **B493**, 27 (1997); *Phys. Lett.* **B412**, 288 (1997) によって提唱された.

21. フレーバーが変化する効果が抑制されている, 余分な次元を持った理論は参考文献 11a の L. Randall and R. Sundrum によって提

案された．そのような理論の問題点は Z. Chacko, M. A. Luty, I. Maksymyk, and E. Pontón, *JHEP* **04**, 001 (2000) によって指摘された．

22. K. Hamaguchi, K.-I. Izawa, Y. Nomura, and T. Yanagida, *Phys. Rev.* **D60**, 125009 (1999).

第32章

高次元での超対称性代数

カルツァ (Kaluza)[1] とクライン (Klein)[2] の先駆的な研究以来, 理論家は4次元より高次元の時空で, より基礎的な物理理論を作ろうと何度となく試みてきた. このアプローチは, 10次元時空で最も単純な形となる超弦理論[3]で復活した. より最近では, 様々な弦理論が**M 理論** (M theory) として知られる理論で統合されるのではないかと示唆されているが, この M 理論の一つの極限は近似的に11次元時空での超重力として記述される.[4] この章では, 高次元で可能な超対称性代数の異なる種を分類し, それを使って粒子の超対称多重項を分類する.

32.1　超対称性代数の一般論

ここでは, 高次元における一般的な超対称性代数の解析を, 25.2節で述べたハーグ・ロプザンスキー・ゾーニウス[5]の4次元時空での仕事と同じ論理的道筋をたどって行う. 24章の補遺で述べたコールマン・マンデューラ定理の証明から, 可能なボゾン的対称性生成子のリストは $d > 2$ 次元時空では本質的に4次元時空と同じであることが明らかだ. 粒子の S 行列理論では, 運動量 d 元ベクトル P^μ, ローレンツ生

成子 $J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$ (ここで μ と ν は$1, 2, \ldots, d-1, 0$ の値をとる), そして, 各種のローレンツ・スカラーの「チャージ」しかない. (ある種の理論では, 粒子に加えて, 閉じた弦や膜 (membrane) などのような, トポロジー的に安定で拡がりを持つ物体があり, それによって他の保存量が存在できる. これについては32.3節で議論する.) フェルミオン的対称性生成子同士の反交換子はボゾン的対称性生成子だから, P^{μ}, $J^{\mu\nu}$ や他の様々な保存スカラー量の1次結合でなければならない. これにより, フェルミオン的生成子のローレンツ変換性には厳しい制限が加わり, またそれにより, それらの生成子が属する超代数も厳しく制限される.

まず最初に一般のフェルミオン的対称性生成子はローレンツ群の基本スピノル表現に従って変換されなければならず, スピノルにベクトルの添字を加えて得られるような高次のスピノル表現に従うものではないことを証明する. ローレンツ群の基本スピノル表現についてはこの章の補遺で概説する. 25.2節で見たように, ハーグ・ロプザンスキー・ゾーニウスの $d=4$ での証明では, $SO(4)$ が $SU(2)\times SU(2)$ に同型であることが用いられたが, 高次元ではそれに相当するものは無い. ここでは, ナーム (Nahm)[6] による, いくらかは簡単で, どの次元にも適用できる議論を使う.

任意のフェルミオン的対称性生成子のローレンツ変換は, 別のフェルミオン的対称性生成子になるから, フェルミオン的対称性生成子は斉次ローレンツ群 $O(d-1,1)$ (もしくは, より厳密に言って, その被覆群 $Spin(d-1,1)$) の表現をなす. フェルミオン的対称性生成子が高々有限個しかないと仮定すると, それらは斉次ローレンツ群の有限次元をなすこととなる. それらの表現は, どれも対応する直交群 $O(d)$ (実際には $Spin(d)$) の有限次元ユニタリー表現から $x^d = ix^0$ として得られる. したがって, まず最初に $O(d)$ のもとのフェルミオン的生成子の変換を考察する. d が偶か奇かによって, $d/2$ か $(d-1)/2$ 個のローレ

ンツ生成子 J_{d1}, J_{23}, J_{45} ,... があり, それらはどれも互いに可換であり, フェルミオン的生成子 Q をそれらが消滅させる $\sigma_{d1}, \sigma_{23}, \ldots$ の値で分類する.

$$[J_{d1}\,, Q] = -\sigma_{d1}Q\ , \quad [J_{23}\,, Q] = -\sigma_{23}Q\ , \quad [J_{45}\,, Q] = -\sigma_{45}Q\ , \ldots . \tag{32.1.1}$$

$O(d)$ の有限次元表現は全てユニタリーだから, σ はすべて実だ.

これらの量子数の一つ $\sigma_{d1} \equiv w$ に着目しよう. そして, 任意のフェルミオン的もしくはボゾン的対称性生成子 O が,

$$[J_{d1}\,, O] = -w\,O \tag{32.1.2}$$

か, ミンコウスキー成分 $J_{01} = iJ_{d1}$ について

$$[J_{01}\,, O] = -iw\,O \tag{32.1.3}$$

を満たすならば, **重み** (weight) w を持っていると呼ぶことにする. この特定の量子数に着目する理由は, この量子数は演算子とそのエルミート共役について同じだからだ. これは, J_{01} がヒルベルト空間(これは場の変数や対称性生成子についてではないが) 上で, エルミート演算子で表されなければならず, そのため (w が実であることに留意すると) (32.1.3) のエルミート共役が

$$-\,[J_{01}\,, O^*] = +iwO^* \tag{32.1.4}$$

であり, O^* は O と同じ重みを持つことによる.

さて, 任意のフェルミオン的対称性生成子 Q とそのエルミート共役の反交換子 $\{Q, Q^*\}$ を考えよう. コールマン・マンデューラ定理によれば, それはせいぜい, P_μ, $J_{\mu\nu}$ と各種のスカラーの線形結合でなければならない. P_μ の成分の重みを計算するには, 交換関係 (2.4.13),

$$i[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho$$

を思い起こす. これによれば, $P_0 \pm P_1$ は重み $w = \pm 1$ を持ち, 他の成分 $P_2, P_3, \ldots, P_{d-1}$ は全て重みゼロだ. 同様に $J_{\mu\nu}$ 同士の交換関係 (2.4.12) から, $J_{0i} \pm J_{1i}$ は $i = 2, 3, \ldots d-1$ について重み $w = \pm 1$ を持ち, J_{ij} の i と j が共に2と $d-1$ の間にあるものは重みゼロ, J_{10} は重みゼロで, 全てのスカラーは当然ながら重みゼロであることが分かる. しがたって, 全てのボゾン的対称性生成子は重み ± 1 か 0 を持ち, 反交換子 $\{Q, Q^*\}$ はそのような重みの演算子の線形結合でなければならないことが分かる. もし, Q が重み w ならば, $\{Q, Q^*\}$ は重み $2w$ だ. また, それはゼロでない任意の Q について明らかにゼロではない. したがって, どのフェルミオン的対称性生成子も重み $\pm 1/2$ しか持てない. (重みゼロというのは, スピンと統計性の関係から除外される. つまり, フェルミオン的演算子は, 半整数の重みを持つ演算子奇数個からのみ構成することができるからだ.) ユークリッド形式に戻ると, $O(d)$ の特定の生成子 J_{01} と $O(d)$ のある表現に属する全ての Q 生成子との交換関係は, $w = \pm 1/2$ として (32.1.2) で与えられ, 01 平面は何も特別ではないから, $O(d)$ 不変性により全ての $O(d)$ の生成子 J_{ij} について同じだ. したがって, (32.1.1) の全ての σ は $\pm 1/2$ だ. 斉次ローレンツ群の全ての σ が $\pm 1/2$ に等しい既約表現は基本スピノル表現だけだから, Q はそれらの表現のある直和に属さなければならない.

この手法を使って, フェルミオン的対称性生成子 Q が全て d 元運動量 P_μ と可換であることも示せる. このためには, 重み ± 1 の運動量演算子 $P_0 \pm P_1$ と任意のフェルミオン的対称性生成子 Q の2重交換子は, もし Q が重み $\pm 1/2$ ならば, 重み $\pm 5/2$ か, もし Q が重み $\mp 1/2$ ならば, 重み $\pm 3/2$ を持つ. そして, 我々がすでに見たように重み $\pm 3/2$ か $\pm 5/2$ のフェルミオン的対称性生成子は存在しないので, これらの2重交換子はすべてゼロでなければならない.

$$[P_0 \pm P_1, [P_0 \pm P_1, Q]] = 0\ .$$

したがって,

$$[P_0 \pm P_1, [P_0 \pm P_1, \{Q, Q^*\}]] = -2\{Q_\pm, Q_\pm^*\}$$

となる. ここで,

$$Q_\pm \equiv [P_0 \pm P_1, Q]$$

とした. さて, $\{Q, Q^*\}$ はせいぜい J, P やスカラーの対称性生成子の線形結合だ. $P_0 \pm P_1$ と P やスカラーの対称性生成子との交換子は消え, $P_0 \pm P_1$ と J の交換子は P の線形結合で, それは他の $P_0 \pm P_1$ と可換だから, 2重交換子 $[P_0 \pm P_1, [P_0 \pm P_1, \{Q, Q^*\}]]$ はゼロとならなければならない. そこで, $\{Q_\pm, Q_\pm^*\} = 0$ であり, これは $Q_\pm = 0$ を意味する. したがって, Q がなすローレンツ群の表現の全ての成分は P_0 や P_1 と可換であり, ローレンツ不変性から全ての Q が全ての P と可換であることが証明された.

この定理には, 重要な系がある. それは, ローレンツ生成子 $J_{\mu\nu}$ は運動量演算子と可換でないので, それらは反交換関係の右辺には現れることができないということだ. とりあえず, Q の内の異なる (必ずしも非同等ではない) 既約スピノル表現を区別する指標 n を付けて, Q_n と表すことにしよう. また, それらには共役な Q^* も含めることにして, 指標はそれらの表現の成分も含めて表すことにする. そうすると, 一般的な半交換関係は,

$$\{Q_n\,, Q_m\} = \Gamma^\mu_{nm} P_\mu + Z_{nm} \tag{32.1.5}$$

という形になる. ここで, Γ^μ_{nm} はc数係数であり, Z_{nm} は保存するスカラーの対称性生成子であり, P_μ や $J_{\mu\nu}$ と可換だ. さて, Z_{nm} は超対称性代数の**中心電荷**となっている, つまり, それらは互いに可換, また Q_ℓ と可換であり, P_μ や $J_{\mu\nu}$ と他の全ての対称性生成子と可換であることを証明したい.

これを $d \geq 4$ で証明するには, ある Z_{nm} がゼロでないためには, それがスカラーだから, (32.1.1) の全ての σ が Q_n と Q_m で反対であることに着目する. 他のフェルミオン的対称性生成子 Q_ℓ を考えて, (32.1.1) の σ が Q_n か Q_m のどちらかの σ とも全く同じでないとする. ($d \geq 4$ では $O(d)$ の既約スピノル表現をなす Q のどの集合についても必ずそのような Q_ℓ が存在する.) 超ヤコビ恒等式,

$$[Q_\ell\,,\{Q_m\,,Q_n\}]+[Q_m\,,\{Q_n\,,Q_\ell\}]+[Q_n\,,\{Q_\ell\,,Q_m\}]=0 \quad (32.1.6)$$

を使う. 反交換子 $\{Q_n\,,Q_\ell\}$ と $\{Q_\ell\,,Q_m\}$ は何らかのゼロでない σ を持つ演算子なので, それらは, Z ではなく P の線形結合でしか有り得ない. したがって, それらは全ての Q と可換だ. これにより,

$$0=[Q_\ell\,,\{Q_m\,,Q_n\}]=[Q_\ell\,,Z_{mn}] \quad (32.1.7)$$

しか残らない. したがって, $O(d)$ の既約スピノル表現をなす Q のどの集合でも, 与えられた Z_{mn} と可換なものが最低一つはある. しかし, Z_{mn} はローレンツ・スカラーだから, これにより, 全ての Q と可換でなければならない. したがって, (32.1.5) からすぐに, それらが互いにも可換であることが分かる.

フェルミオン的生成子は全てのスカラー・ボゾン的対称性演算子の作る代数 $\mathcal{A}$ の表現 (それもおそらく, 恒等表現) をなさなければならない. したがって, 25.2節で使った議論と全く同じ議論で, 中心電荷 Z_{mn} は $\mathcal{A}$ の不変可換部分代数をなすことが結論できる. コールマン・マンデューラ定理によれば, $\mathcal{A}$ は $U(1)$ 生成子と共にコンパクト半単純リー代数の直和をなさなければならず, それは定義により不変可換部分代数を含まないので, Z_{mn} は $U(1)$ 生成子でなければならず, それは, 互いに可換であるのみならず, 他の全てのボゾン的対称性生成子と可換だ.

反交換関係 (32.1.5) の構造について更に詳しい情報を得るには, ロー

レンツ変換とフェルミオン的対称性生成子 Q_n の実数性を更に特定する必要がある. それらは偶数次元と奇数次元で非常に異なる.

奇数次元

この章の補遺では奇数時空次元 d では, ローレンツ代数には基本スピノル表現はたった一つしかないことを示す. それはディラック行列を使って(32.A.2)で与えられる行列 $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ だから, α を $2^{(d-1)/2}$ 個の値をとるディラック指標, $r = 1, 2, \ldots, N$ を N 拡張超対称性の場合に異なるスピノルを表す指標として, フェルミオン的対称性生成子を $Q_{\alpha r}$ のように表さなければならない. この記法では, Q のローレンツ変換性から,

$$[J_{\mu\nu}\,,\, Q_{\alpha r}] = -\sum_{\beta}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_{\alpha\beta}\, Q_{\beta r} \tag{32.1.8}$$

となっているから, これらの生成子の反交換子は,

$$\begin{aligned}[J_{\mu\nu}\,,\, \{Q_{\alpha r}\,,\, Q_{\beta s}\}] = &-\sum_{\bar{\alpha}}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_{\alpha\bar{\alpha}}\{Q_{\bar{\alpha} r}\,,\, Q_{\beta s}\} \\ &-\sum_{\bar{\beta}}(\mathcal{J}_{\mu\nu})_{\beta\bar{\beta}}\{Q_{\alpha r}\,,\, Q_{\bar{\beta} s}\}\end{aligned}$$

という変換則に従う. 運動量演算子 P_λ のローレンツ変換則(2.4.13)を思い起こすと, (32.1.5)の行列 Γ^λ_{rs} と演算子 Z_{rs} は(ディラック指標は略することにして) 以下の条件を満たさなければならない.

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}(\Gamma_\lambda)_{rs} + (\Gamma_\lambda)_{rs}\mathcal{J}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = -i\,(\Gamma_\mu)_{rs}\eta_{\nu\lambda} + i\,(\Gamma_\nu)_{rs}\eta_{\mu\lambda}\,, \tag{32.1.9}$$

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}Z_{rs} + Z_{rs}\mathcal{J}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = 0\,. \tag{32.1.10}$$

しかし, (32.A.38) から $\mathcal{J}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = -\mathcal{C}^{-1}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C}$ だから, (32.1.9) と (32.1.10) は, $(\Gamma_\mu)_{rs}\mathcal{C}^{-1}$ が, $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ に対して γ_μ と同じ交換関係(32.A.32)を満たさなければならず, $Z_{rs}\mathcal{C}^{-1}$ は $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ と可換だという要請に書き換えるこ

とができる．d が奇数のときは，これらの条件を満たす行列は定数因子を除いてただ一つに決まるので，

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha r\,\beta s} = i\,g_{rs}\,(\gamma^{\lambda}\,\mathcal{C})_{\alpha\beta} \tag{32.1.11}$$

と，

$$Z_{\alpha r\,\beta s} = \mathcal{C}_{\alpha\beta}\,z_{rs} \tag{32.1.12}$$

が結論される．ここで，(32.1.11) には後で便利なように因子 i を入れておいた．ディラック指標を略すと，反交換関係 (32.1.5) は，

$$\{Q_r\,,\,Q_s^{\mathrm{T}}\} = i\,g_{rs}\gamma^{\lambda}\,\mathcal{C}\,P_{\lambda} + z_{rs}\mathcal{C} \tag{32.1.13}$$

となる．

$\Gamma^{\lambda}_{\alpha r\,\beta s}$ と $Z_{\alpha r\,\beta s}$ は共に α および r の β および s との交換のもとで対称だ．また，(32.A.30) と (32.A.31) ($d = 2n+1$ として) から $d = 1$ (mod 8) では $\gamma^{\lambda}\mathcal{C}$ は対称，$\mathcal{C}$ は対称，$d = 3$ (mod 8) では $\gamma^{\lambda}\mathcal{C}$ は対称，$\mathcal{C}$ は反対称，$d = 5$ (mod 8) では $\gamma^{\lambda}\mathcal{C}$ は反対称，$\mathcal{C}$ は反対称，$d = 7$ (mod 8) では $\gamma^{\lambda}\mathcal{C}$ は反対称，$\mathcal{C}$ は対称であることが分かる．したがって，$d = 1$ (mod 8) で g_{rs} は対称，z_{rs} は対称，$d = 3$ (mod 8) で g_{rs} は対称，z_{rs} は反対称，$d = 5$ (mod 8) で g_{rs} は反対称，z_{rs} は反対称，$d = 7$ (mod 8) で g_{rs} は反対称，z_{rs} は対称となる．

行列 $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ の複素共役は (32.A.37) で与えられる．(32.1.8) のエルミート共役をとると，$\sum_{\beta}(\mathcal{C}\beta)_{\alpha\beta}Q^{*}_{\beta r}$ は任意の $Q_{\alpha s}$ と同じローレンツ変換性を持ち，したがって，それらの線形結合でなければならないことが分かる．

$$\sum_{\beta}(\mathcal{C}\beta)_{\alpha\beta}Q^{*}_{\beta r} = \sum_{s}\mathcal{S}_{rs}Q_{\alpha s}\,. \tag{32.1.14}$$

この式のエルミート共役をとり，(32.A.28) と (32.A.29) で $d = 2n+1$ とすると，

$$\mathcal{S}^{*}\mathcal{S} = (-1)^{a}\cdot 1\,, \qquad a = (d-1)(d-3)/8 \tag{32.1.15}$$

を得る. $d=1$ (mod 8) と $d=3$ (mod 8) とでは, ローレンツ代数のスピノル表現は実で, $\mathcal{S}=1$ となるようにフェルミオン的生成子の基底を選ぶことができる. 対照的に, $d=5$ (mod 8) と $d=7$ (mod 8) とではローレンツ代数のスピノル表現は擬実で, $\mathcal{S}\propto 1$ となる基底を選ぶことは明らかに不可能だ. (32.1.15) の行列式をとると, この場合は $\mathrm{Det}\,(-1)>0$ であることが分かるので, $d=5$ (mod 8) と $d=7$ (mod 8) では偶数 N のフェルミオン的生成子がなければならない. この場合は基底を選んで, $\mathcal{S}=\Omega$ とすることができる. ここで, Ω は実の反対称ブロック対角行列,

$$\Omega=\begin{pmatrix} e & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & e & \cdots \\ & \cdots & & \end{pmatrix}, \qquad e=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{32.1.16}$$

だ.

g_{rs} と z_{rs} の実正定値性は (32.1.14) を使って反交換関係 (32.1.13) を以下のように書き換えることで調べることができる.

$$\{Q_r\,,\,Q_s^\dagger\}=i(g\mathcal{S}^{\mathrm{T}})_{rs}\gamma_\lambda\mathcal{C}(\mathcal{C}\beta)^{\mathrm{T}-1}P^\lambda+(z\mathcal{S}^{\mathrm{T}})_{rs}\mathcal{C}(\mathcal{C}\beta)^{\mathrm{T}-1}\,.$$

(32.A.12), (32.A.16), (32.A.30) で $d=2n+1$ とすると, $\beta^{\mathrm{T}}=-\beta$ と $\mathcal{C}\mathcal{C}^{\mathrm{T}-1}=(-1)^{(d-1)(d+1)/8}\cdot 1$ が分かるので,

$$\{Q_r\,,\,Q_s^\dagger\}=-(-1)^{(d-1)(d+1)/8}\Big[i(g\mathcal{S}^{\mathrm{T}})_{rs}\gamma_\lambda\beta P^\lambda+(z\mathcal{S}^{\mathrm{T}})_{rs}\beta)\Big] \tag{32.1.17}$$

となる. $\gamma_0=i\beta$ を思い起こすと, 演算子行列 $-i\gamma_\lambda\beta P^\lambda$ は正またはゼロで, 真空状態を除いては正だと分かる. 運動量が十分に大きく, (32.1.17) の中心電荷の項が無視できる場合を考えると, 行列 $(-1)^{(d-1)(d+1)/8}g\mathcal{S}^{\mathrm{T}}$ が正でエルミートだと結論される. 任意の運動量を考えると, 演算子 $(z\mathcal{S}^{\mathrm{T}})_{rs}$ の列もエルミートだと分かる. (中心電荷

がゼロでないと, (25.5.22) に類似の質量の下限が出るが, これはここでは与えない.) $g\mathcal{S}^{\mathrm{T}}$ のエルミート性から,

$$g^{\dagger} = \mathcal{S}^{\mathrm{T}\dagger -1} g \mathcal{S}^{\mathrm{T}} = (-1)^{a} \mathcal{S} g \mathcal{S}^{\mathrm{T}} \tag{32.1.18}$$

となる. これで, 基底を適切に選ぶことで, 反交換関係を便利な正準形にする準備が整った.

$d = 1 \pmod 8$ では, g と z は対称で $(-1)^a = +1$ だから, $\mathcal{S} = 1$ となるような基底を選べば, g は実で, 個々の z_{rs} はエルミート演算子だ. $\mathcal{S} = 1$ を変えずに, Q に任意の実行列 $\mathcal{A}$ をかけて新しい Q を導入すると, g は $\mathcal{A} g \mathcal{A}^{\mathrm{T}}$ に変わる. $d = 1 \pmod 8$ では g は正行列なので, 有名な定理[6a] によれば, $\mathcal{A}$ を $g = 1$ とするように選ぶことができる.

$d = 3 \pmod 8$ では g は対称で, z は反対称, また $(-1)^a = +1$ だから, 基底を $\mathcal{S} = 1$ となるように選べば, g は実で個々の z_{rs} は反エルミート演算子となる. $d = 1 \pmod 8$ のときと同様に, 基底を更に調節して $g = 1$ とできる.

$d = 5 \pmod 8$ では, g は反対称だから $\mathcal{S} = \Omega$ と選ぶと, (32.1.18) から $g^* = -\Omega g \Omega$ となる. ここで Ω は標準的な (32.1.16) の反対称行列だ. このとき, $\mathcal{S} = \Omega$ を保ったまま, Q に $\mathcal{B}^* = -\Omega \mathcal{B} \Omega$ となる任意の行列 $\mathcal{B}$ をかけて新しい Q を作り, g が $\mathcal{B} g \mathcal{B}^{\mathrm{T}}$ に変わるようにできる. $(-1)^a = -1$ だから, $g\Omega$ は正なので, このようにして $g = -\Omega$ とすることが可能だ. また, z は反対称で $z\Omega$ はエルミートなので, $z^* = -\Omega\, z\, \Omega$ だ.

$d = 7 \pmod 8$ では g は上と同様に反対称だが, $(-1)^a = +1$ なので, $d = 5 \pmod 8$ のときと同じ方法で $g = +\Omega$ となる基底を選ぶことができる. また, z はここでは対称で, $z\Omega$ はまたエルミートなので, $z^* = +\Omega\, z\, \Omega$ となる.

偶数次元

この章の補遺で示しているように, 偶数時空次元 d では(32.A.22), (32.A.2), (32.A.17)で与えられる行列 $\mathcal{J}^{\pm}_{\mu\nu}$ のローレンツ代数には, 二つの同等ではない基本スピノル表現がある. したがって, ここでは, α を $2^{d/2}$ 個の値をとるディラック指標, r を拡張超対称性の場合にローレンツ代数の同等な表現に属する異なる Q を区別するための指標として, フェルミオン的生成子を $Q^{\pm}_{\alpha r}$ と表さなければならない. そして,

$$\sum_{\beta}(\gamma_{d+1})_{\alpha\beta}\,Q^{\pm}_{\beta r} = \pm\,Q^{\pm}_{\alpha r} \tag{32.1.19}$$

とする. ここで $\gamma_{d+1} \equiv i^{d/2-1}\gamma_1\cdots\gamma_{d-1}\gamma_0$ だ. この記法では, Q のローレンツ変換性から,

$$[J_{\mu\nu}\,,\,Q^{\pm}_{\alpha r}] = -\sum_{\beta}(\mathcal{J}^{\pm}_{\mu\nu})_{\alpha\beta}\,Q^{\pm}_{\beta r} \tag{32.1.20}$$

となる. ここで $\mathcal{J}^{\pm}_{\mu\nu}$ は(32.A.22)の行列だ. (32.1.19)と $\mathcal{C}^{-1}\gamma_{d+1}\mathcal{C} = (-1)^{d/2}\gamma_{d+1}$ の関係式を考慮に入れると, d が奇数のときに反交換関係(32.1.13)を導いたのと同じ議論で以下を得る.

$$\{Q^{\pm}_{r}\,,\,Q^{\mp(-1)^{d/2}\,\mathrm{T}}_{s}\} = i\,g^{\pm}_{rs}\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma^{\lambda}\,\mathcal{C}\,P_{\lambda}\,, \tag{32.1.21}$$

$$\{Q^{\pm}_{r}\,,\,Q^{\pm(-1)^{d/2}\,\mathrm{T}}_{s}\} = z^{\pm}_{rs}\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\mathcal{C}\,. \tag{32.1.22}$$

(32.A.30) と (32.A.31) からは, $\mathcal{C}\gamma^{\lambda}$ は, $d=0$ (mod 8) と $d=2$ (mod 8) で対称, $d=4$ (mod 8) と $d=6$ (mod 8) で反対称, $\mathcal{C}$ は, $d=0$ (mod 8) と $d=6$ (mod 8) で対称, $d=2$ (mod 8) と $d=4$ (mod 8)で反対称であることが分かる. したがって (32.1.21) から対称性,

$$g^{\pm}_{rs} = \begin{cases} g^{\mp(-1)^{d/2}}_{sr} & d=0,2\ (\mathrm{mod}\ 8), \\ -g^{\mp(-1)^{d/2}}_{sr} & d=4,6\ (\mathrm{mod}\ 8) \end{cases} \tag{32.1.23}$$

が要請され, (32.1.22) から,

$$z_{rs}^{\pm} = \begin{cases} z_{sr}^{\pm(-1)^{d/2}} & d = 0, 6 \pmod 8, \\ -z_{sr}^{\pm(-1)^{d/2}} & d = 2, 4 \pmod 8) \end{cases} \tag{32.1.24}$$

が要請される. 特に, $d = 0 \pmod 8$ で $z^{\pm}$ は対称, $d = 2 \pmod 8$ で $g^{\pm}$ は対称, $d = 4 \pmod 8$ で $z^{\pm}$ は反対称, $d = 6 \pmod 8$ で $g^{\pm}$ は反対称となる.

(32.1.20) のエルミート共役をとり, (32.A.25) を使うと, $\mathcal{C}\beta Q_r^{\pm *}$ が演算子 $Q_s^{\mp(-1)^{d/2}}$ と同じローレンツ変換性を持ち, したがってそれらの線形結合で与えられることが分かる.

$$\mathcal{C}\beta\, Q_r^{\pm *} = \sum_s \mathcal{S}_{rs}^{\pm}\, Q_s^{\mp(-1)^{d/2}} . \tag{32.1.25}$$

この式のエルミート共役をとり, (32.A.28) と (32.A.29) を $d = 2n$ として使うと,

$$\mathcal{S}^{\pm\,*}\mathcal{S}^{\mp(-)d/2} = (-1)^a \cdot 1 , \qquad a = d(d-2)/8 \tag{32.1.26}$$

を得る. $d = 0 \pmod 8$ と $d = 4 \pmod 8$ では, (32.1.25) は一つの既約表現を他と関係付け, $d = 0 \pmod 8$ では $\mathcal{S}^{\pm} = 1$, $d = 4 \pmod 8$ では $\mathcal{S}^{\pm} = \pm 1$ となる基底を選ぶことができる. $d = 2 \pmod 8$ では, (32.1.25) は実表現をそれ自身と関係付け, $\mathcal{S}^{\pm} = 1$ となる基底を選ぶことができる. $d = 6 \pmod 8$ では, (32.1.25) は擬実表現をそれ自身と関係付け, (32.1.26) の行列式は Q^+ が偶数個, Q^- が (必ずしも同じ数ではない) 偶数個あることを示し, $\Omega^{\pm}$ を (32.1.16) の形の標準的な実反対称行列として $\mathcal{S}^{\pm} = \Omega^{\pm}$ となる基底を選ぶことができる.

$g_{rs}^{\pm}$ の実数性と正定値性, 及び $z_{rs}^{\pm}$ の実数性は, (32.1.25) を使って反交換関係 (32.1.21) と (32.1.22) を次の形に書くことで導くことができる.

$$\{Q_r^{\pm} , Q_s^{\pm\dagger}\} = \left(\frac{1 \pm \gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma_{\lambda}\beta\, P^{\lambda}\mathcal{C}(\mathcal{C}\beta)^{\mathrm{T}-1}\left(g^{\pm}\mathcal{S}^{\mp\mathrm{T}}\right)_{rs} , \tag{32.1.27}$$

$$\{Q_r^{\pm}\,,\,Q_s^{\mp\dagger}\} = \left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\mathcal{C}(\mathcal{C}\beta)^{\mathrm{T}-1}\left(z^{\pm}\mathcal{S}^{\mp\mathrm{T}}\right)_{rs}\,. \qquad (32.1.28)$$

前と同様に, 関係式 $\mathcal{C}\mathcal{C}^{\mathrm{T}-1} = (-1)^{d(d+2)/8}$, $\beta^{\mathrm{T}} = -\beta$, $\gamma_0 = i\beta$ を使うと, $(-1)^{d(d+2)/8}g^{\pm}\mathcal{S}^{\pm\mathrm{T}}$ がエルミートで正, また $(z^{+}\mathcal{S}^{-\mathrm{T}})^{\dagger} = z^{-}\mathcal{S}^{+\mathrm{T}}$ が結論できる. $d = 0 \pmod 8$ では $\mathcal{S}^{\pm} = 1$, $g^{\pm} = 1$, $z^{+\dagger} = z^{-}$ となる基底を選ぶことができる. $d = 2 \pmod 8$ では $\mathcal{S}^{\pm} = 1$, $g^{\pm} = -1$, $z^{+\dagger} = z^{-}$ となる基底を選ぶことができる. $d = 4 \pmod 8$ では, $\mathcal{S}^{\pm} = \pm1$, $g^{\pm} = \mp1$, $z^{+\dagger} = -z^{-}$ となる基底を選ぶことができる. また, $d = 6 \pmod 8$ では, $\mathcal{S}^{\pm} = \Omega^{\pm}$, $g^{\pm} = \Omega^{\pm}$, $(z^{+}\Omega^{-})^{\dagger} = z^{-}\Omega^{+}$ となる基底を選ぶことができる.

まとめると, 適切な基底では, 反交換関係と実, 対称条件は以下のようになる.[6b]

$d = 0 \pmod 8$

$$\{Q_r^{\pm}\,,\,Q_s^{\mp\,\mathrm{T}}\} = i\,\delta_{rs}\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma^{\lambda}\,\mathcal{C}\,P_{\lambda}\,, \qquad (32.1.29)$$

$$\{Q_r^{\pm}\,,\,Q_s^{\pm\,\mathrm{T}}\} = z_{rs}^{\pm}\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\mathcal{C}\,, \qquad (32.1.30)$$

$$\mathcal{C}\beta\,Q_r^{\pm *} = Q_r^{\mp}\,, \qquad z_{rs}^{\pm} = z_{sr}^{\pm} = (z_{rs}^{\mp})^{*}\,. \qquad (32.1.31)$$

$d = 1 \pmod 8$

$$\{Q_r\,,\,Q_s^{\mathrm{T}}\} = i\,\delta_{rs}\gamma^{\lambda}\,\mathcal{C}\,P_{\lambda} + z_{rs}\mathcal{C}\,, \qquad (32.1.32)$$

$$\mathcal{C}\beta Q_r^{*} = Q_r\,, \qquad z_{rs} = z_{sr} = z_{rs}^{*}\,. \qquad (32.1.33)$$

$d = 2 \pmod 8$

$$\{Q_r^{\pm}\,,\,Q_s^{\pm\,\mathrm{T}}\} = -i\,\delta_{rs}\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma^{\lambda}\,\mathcal{C}\,P_{\lambda}\,, \qquad (32.1.34)$$

$$\{Q_r^{\pm}\,,\,Q_s^{\mp\,\mathrm{T}}\} = z_{rs}^{\pm}\left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)\mathcal{C}\,, \qquad (32.1.35)$$

$$\mathcal{C}\beta\, Q_r^{\pm *} = Q_r^{\pm}\ , \qquad z_{rs}^{\pm} = -z_{rs}^{\pm *} = -z_{sr}^{\mp}\ . \tag{32.1.36}$$

$d = 3\ (\mathrm{mod}\ 8)$

$$\{Q_r\,,\, Q_s^{\mathrm{T}}\} = i\,\delta_{rs}\gamma^{\lambda}\,\mathcal{C}\,P_{\lambda} + z_{rs}\mathcal{C}\ , \tag{32.1.37}$$

$$\mathcal{C}\beta Q_r^{*} = Q_r\ , \qquad z_{rs} = -z_{sr} = -z_{rs}^{*}\ . \tag{32.1.38}$$

$d = 4\ (\mathrm{mod}\ 8)$

$$\{Q_r^{\pm}\,,\, Q_s^{\mp\,\mathrm{T}}\} = \mp i\,\delta_{rs}\left(\frac{1 \pm \gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma^{\lambda}\,\mathcal{C}\,P_{\lambda}\ , \tag{32.1.39}$$

$$\{Q_r^{\pm}\,,\, Q_s^{\pm\,\mathrm{T}}\} = z_{rs}^{\pm}\left(\frac{1 \pm \gamma_{d+1}}{2}\right)\mathcal{C}\ , \tag{32.1.40}$$

$$\mathcal{C}\beta\, Q_r^{\pm *} = \pm Q_r^{\mp}\ , \qquad z_{rs}^{\pm} = z_{rs}^{\mp *} = -z_{sr}^{\pm}\ . \tag{32.1.41}$$

$d = 5\ (\mathrm{mod}\ 8)$

$$\{Q_r\,,\, Q_s^{\mathrm{T}}\} = -i\,\Omega_{rs}\gamma^{\lambda}\,\mathcal{C}\,P_{\lambda} + z_{rs}\mathcal{C}\ , \tag{32.1.42}$$

$$\mathcal{C}\beta Q_r^{*} = \sum_s \Omega_{rs} Q_s\ , \qquad z_{rs} = -z_{sr}\ , \qquad z^{*} = -\Omega z \Omega\ . \tag{32.1.43}$$

$d = 6\ (\mathrm{mod}\ 8)$

$$\{Q_r^{\pm}\,,\, Q_s^{\pm\,\mathrm{T}}\} = i\,\Omega_{rs}^{\pm}\left(\frac{1 \pm \gamma_{d+1}}{2}\right)\gamma^{\lambda}\,\mathcal{C}\,P_{\lambda}\ , \tag{32.1.44}$$

$$\{Q_r^{\pm}\,,\, Q_s^{\mp\,\mathrm{T}}\} = z_{rs}^{\pm}\left(\frac{1 \pm \gamma_{d+1}}{2}\right)\mathcal{C}\ , \tag{32.1.45}$$

$$\mathcal{C}\beta\, Q_r^{\pm *} = \sum_s \Omega_{rs}^{\pm} Q_s^{\pm}\ , \qquad z_{rs}^{\pm *} = \Omega^{\pm} z_{rs}^{\pm} \Omega^{\mp} = z_{sr}^{\mp}\ . \tag{32.1.46}$$

$d = 7\ (\mathrm{mod}\ 8)$

$$\{Q_r\,,\, Q_s^{\mathrm{T}}\} = i\,\Omega_{rs}\gamma^{\lambda}\,\mathcal{C}\,P_{\lambda} + z_{rs}\mathcal{C}\ , \tag{32.1.47}$$

$$\mathcal{C}\beta Q_r^* = \sum_s \Omega_{rs} Q_s \ , \qquad z_{rs} = z_{sr} \ , \qquad z^* = +\Omega z \Omega \ . \tag{32.1.48}$$

これらの反交換関係を調べると, 中心電荷が無い場合, それらはフェルミオン的生成子のある線形変換のもとで不変であることがわかる. その変換とは, d が奇数のときには $Q_r \to \sum_s V_{rs} Q_s$ という形で, d が偶数の時には $Q_r^{\pm} \to \sum_s V_{rs}^{\pm} Q_s^{\pm}$ という形のものだ. 関係式(32.1.29)–(32.1.48) を壊さないためには, V は以下の条件を満たさなければならない.

$d = 0$ と $d = 4$ (mod 8)

$$V^{\pm} V^{\mp \mathrm{T}} = 1 \ , \qquad V^{\pm *} = V^{\mp} \ . \tag{32.1.49}$$

$d = 1$ と $d = 3$ (mod 8)

$$V V^{\mathrm{T}} = 1 \ , \qquad V^* = V \ . \tag{32.1.50}$$

$d = 2$ (mod 8)

$$V^{\pm} V^{\pm \mathrm{T}} = 1 \ , \qquad V^{\pm} = V^{\pm *} \ . \tag{32.1.51}$$

$d = 5$ (mod 8)

$$V \Omega V^{\mathrm{T}} = \Omega \ , \qquad V^* = -\Omega V \Omega \ . \tag{32.1.52}$$

$d = 6$ (mod 8)

$$V^{\pm} V^{\pm \mathrm{T}} = 1 \ , \qquad V^{\pm *} = -\Omega^{\pm} V^{\pm} \Omega^{\pm} \ . \tag{32.1.53}$$

$d = 7$ (mod 8)

$$V \Omega V^{\mathrm{T}} = \Omega \ , \qquad V^* = -\Omega V \Omega \ . \tag{32.1.54}$$

これらの行列は以下の群をなす.

$d=0$ と $d=4$ (mod 8)	$U(N)$
$d=1$ と $d=3$ (mod 8)	$O(N)$
$d=2$ (mod 8)	$O(N_+)\times O(N_-)$
$d=5$ と $d=7$ (mod 8)	$USp(N)$ (N は偶)
$d=6$ (mod 8)	$USp(N_+)\times USp(N_-)$ ($N_\pm$ は偶)

ここで N は, d が奇数のときには Q のなかの基本スピノル表現の数であり, $d=0$ (mod 8) と $d=4$ (mod 8) では Q のなかのそれぞれのカイラリティの基本スピノル表現の数だ. $d=2$ (mod 8) と $d=6$ (mod 8) では, Q の中の基本スピノル表現の数はそれぞれのカイラリティで等しい必要は無く, それらを N_+ と N_- とで表している.

32.2 質量ゼロの多重項

次に, 前節で構成した超対称性代数を使って $d\geq 4$ 時空次元で質量ゼロ粒子状態の超対称多重項を構成する方法を考える. 運動量演算子 P^μ は全てのフェルミオン的対称性生成子と可換なので, P^μ が一定の光錐的固有ベクトル p^μ を持つヒルベルト空間の 1 粒子部分空間で全てを考えることができる. このベクトルは $p^1=p^0$ で p^μ の他の全ての空間成分がゼロとなる方向に取ってよい. 2.5 節で議論した 4 次元時空の場合と同様に, これらの 1 粒子状態はそれらが持つ小群, すなわち p^μ を不変に保つ斉次ローレンツ群の部分群の有限次元表現に従って分類される. 小群は, 4 次元時空での変換 (2.5.6) のような $\mathbf{p}$ に垂直な方向へのブーストと $\mathbf{p}$ が存在する面内の回転の組み合わせを含むが, これらは不変可換部分群を成し, したがって有限次元表現では単位演算子で表される必要がある. この部分群を省略した d 次元で

の縮小した小群は, $\mathbf{p}$ に直交する面内での回転から成る $O(d-2)$ だ. したがって質量ゼロ粒子状態をそれらが持つ $O(d-2)$ と前節の最後に説明した自己同型群の表現に従って分類する.

これらの表現は, 4 次元時空で取り扱ったものより複雑だ. 4 次元では縮小した小群は $O(2)$ で, 表現は 1 次元でヘリシティという一つだけの数で特徴付けられる. しかしながら, 縮小した小群 $O(d-2)$ の表現に, 任意の生成子 J_{ij} の固有値の絶対値の最大値で定義される「スピン」の添字を付けるのは有用だ.

スピンが 2 を越える質量ゼロ粒子を含む矛盾のない場の量子論は存在しないということは広く信じられている. スピンが $j>1/2$ の軟質量ゼロ粒子はスピン j を持つ保存カレントとだけ相互作用できることが知られている.[7] $j=1$ の場合にはこれは電荷のような通常の保存スカラーのカレントだ. $j=3/2$ の場合にはこれは超対称性に伴う一つ以上の超カレントだ. また $j=2$ の場合にはエネルギー運動量テンソルというただ一つのカレントだ. しかし, $j>5/2$ の場合には軟質量ゼロ粒子と相互作用できる保存カレントは存在しない. スピン 2 の質量ゼロ粒子の 2 種類以上の存在かまたはスピンが 2 を越える質量ゼロ粒子の存在を禁止することで, 超対称性が可能な次元についての厳格な制限を導くことができる.

しばらくの間, 32.1 節で使った演算子を, それが消滅させる $O(d)$ 生成子 J_{d1} の値に等しい重みに従って, 分類することに戻ろう. ($J_{01}=iJ_{d1}$ を思い出そう.) フェルミオン的超対称性生成子は重み 1/2 と $-1/2$ を持つので, これらの生成子のうち任意のものとそのエルミート共役との反交換関係はそれぞれ重み $+1$ か -1 しか持てず, したがってそれぞれ演算子 P^0+P^1 または P^0-P^1 に比例しなければならない. しかし今は演算子 P^0-P^1 がゼロのヒルベルト空間の部分空間を考えているので, この部分空間では重み $-1/2$ のフェルミオン的超対称性生成子は全てゼロだ. したがって 1 粒子状態を分類するためには超対

称性生成子のちょうど半分, すなわち重み $\sigma_{d1}=+1/2$ の 2^{n-1} 個の生成子だけが使える.

さらに残った超対称性生成子を, $\sigma_{d1}=+1/2$ と同時に $\sigma_{23}=1/2$ または $\sigma_{23}=-1/2$ を満たす2 種類に分けることができる. 演算子 P^0+P^1 は $\sigma_{23}=0$ を持つので, 各々の種類のフェルミオン的超対称性生成子は互いに反可換だが, それらの共役量や他方の種類の生成子とは必ずしも反可換でない.

次に, 小群 $O(d-2)$ のスピン j をもつ表現を考察する. J_{23} の固有値 $\lambda>0$ の固有状態であり, 全ての $\sigma_{23}=-1/2$ の超対称性生成子で消される任意の状態 $|\lambda\rangle$ を考える. (J_{23} の最大固有値 j を持つ任意の状態はこの種の状態だが, 一般には他にもそのような状態はあり得る.) $|\lambda\rangle$ に $\sigma_{23}=+1/2$ および $\sigma_{d1}=+1/2$ を持つk 個のフェルミオン的生成子を作用させて $J_{23}=\lambda-k/2$ の状態を作ることができる. (これらの状態はどれもゼロでないことを示すことができる. なぜなら, それらにこれらのフェルミオン的生成子の共役量を作用させると状態 $|\lambda\rangle$ に戻るからだ.) 全ての種類のフェルミオン的超対称性生成子が全部で $\mathcal{N}$ 個あると, その内の $\mathcal{N}/4$ 個は $\sigma_{23}=+1/2$ と $\sigma_{d1}=+1/2$ を持つ. これらの演算子は全て反可換なので, このようにして作った $J_{23}=\lambda-k/2$ の状態数は 2 項係数

$$\begin{pmatrix}\mathcal{N}/4\\ k\end{pmatrix} \tag{32.2.1}$$

で与えられ, $k=0$ から最大値 $k=\mathcal{N}/4$ まで加えると全部で $2^{\mathcal{N}/4}$ 個の成分になる. このようにして得られた J_{23} の最小値は $\lambda-\mathcal{N}/8$ で, 状態 $|\lambda\rangle$ に $k=\mathcal{N}/4$ 個の超対称性生成子をかけて得られる. $\lambda=j$ と取ると, J_{23} が $+2$ 以上または -2 以下の固有値を持つことを避けるためには $j\leq 2$ と $j-\mathcal{N}/8\geq -2$ でなければならず, フェルミオン的生成子の総数 $\mathcal{N}$ が32 以下であることが要求されることが分かる.

さらに, $\mathcal{N} = 32$ 個の超対称性生成子の場合に, この様にして状態 $|2\rangle$ に $\sigma_{23} = +1/2$ と $\sigma_{d1} = +1/2$ を持つ超対称性生成子の積を作用させて作られた質量ゼロ粒子の超対称多重項はせいぜい一つだけしか存在できない. これらの状態は小群の任意の生成子の固有値が -2 から $+2$ まで $1/2$ 間隔の値を取る.「物質」の超対称多重項, すなわち重力子を含まない超対称多重項が存在できるのは $\mathcal{N} < 32$ の場合だけだ.

$2n$ 次元または $2n+1$ 次元の一つの基本スピノル表現は 2^n 個の成分を含むので, フェルミオン的生成子の数が 32 を越えないようにするには $n \leq 5$ でなければならない. したがって時空次元は $d = 11$ 以下でなければならず, この場合は $N = 1$ でなければならない. 11次元の超重力は特に興味深い. なぜならこの理論は, **M 理論**[4] と呼ばれる基礎理論の「低エネルギー」極限の可能性があるからだ. この M 理論はまた他の極限で様々な弦理論を生み出すと信じられている. そこで, $d = 11$ 次元 $N = 1$ 超対称性のスピンの内容を詳しく調べよう. 以下は, これを行うための賢い勘定の仕方の例になっている.

$d = 11$ の質量ゼロ多重項の全ての状態は J_{23} の固有値2の固有状態 $|2\rangle$ に $\sigma_{23} = +1/2$ と $\sigma_{2n-1\,2n} = +1/2$ を持つ $k = 0, 1, \ldots, 8$ 個の超対称性生成子の積を作用させて構成できる. (32.2.1) に従って, $J_{23} = \pm 2$ を持つ 1 個の状態, 各々が $J_{23} = \pm 3/2$ を持つ8個の状態, 各々が $J_{23} = \pm 1$ を持つ28個の状態, 各々が $J_{23} = \pm 1/2$ を持つ56個の状態, および各々が $J_{23} = 0$ を持つ70個の状態が得られる.

$d = 11$ の場合, 小群 $O(9)$ のスピン2の重力子表現は $9 \times 10/2 - 1 = 44$ 個の独立な成分を持つ対称でトレース・ゼロのテンソルで, $J_{23} = \pm 2$ の1個の $2 \pm i3$, $2 \pm i3$ 成分, $J_{23} = \pm 1$ の7個の $2 \pm i3$, k 成分, および $J_{23} = 0$ の 28 個の k, ℓ 成分を含む. (ここで k と ℓ は 4, 5, ..., 10 の七つの値を取る. $2 + i3$, $2 - i3$ 成分は数えない. なぜならそれはこの表現では k, ℓ 成分とトレース・ゼロの条件で関係しているからだ.)

また, スピン 3/2 のグラヴィティーノ表現が一つだけ存在する. こ

れは余分な 9 成分ベクトルの添字 i を持つスピノル ψ_i から成り, スピン 1/2 成分を除外する既約条件 $\sum_i \gamma_i \psi_i = 0$ が課せられているので, $9 \times 16 - 16 = 128$ 個の独立な成分を持つ.

$|2\rangle$ に超対称性生成子を作用させて作られる重力子とグラヴィティーノから J_{23} の各値の成分の数を引いて, 全部で $J_{23} = \pm 1$ の $28 - 7 = 21$ 個の成分と $J_{23} = 0$ の $70 - 28 = 42$ 個の成分を持つ状態がさらに一つ以上必要なことが分かる. J_{ij} の ± 1 と 0 以外の 固有値を持たない直交群の表現は反対称テンソルだけだ. 9次元で階数 p の反対称テンソル $T_{i_1 \cdots i_p}$ は,

$$J_{23} = 0 \text{ を持つ } \begin{pmatrix} 7 \\ p \end{pmatrix} \text{ 個の成分の } T_{k_1 \cdots k_p}\ ,$$

$$J_{23} = \pm 1 \text{ を持つ } \begin{pmatrix} 7 \\ p-1 \end{pmatrix} \text{ 個の成分の } T_{2 \pm i3\, k_2 \cdots k_p}\ ,$$

$$J_{23} = 0 \text{ を持つ } \begin{pmatrix} 7 \\ p-2 \end{pmatrix} \text{ 個の成分の } T_{2+i3\, 2-i3\, k_3 \cdots k_p}$$

で, $k_1, \ldots, k_p$ は $4, 5, \ldots, 10$ の七つの値を取る. $O(9)$ では独立な反対称テンソルの階数は $p = 0, 1, 2, 3, 4$ だけだ. 階数4の反対称テンソルは $J_{23} = \pm 1$ の35個の成分を持つが, これは必要な数を超えているので除外しなければならない. $J_{23} = \pm 1$ で必要な21成分を持つ $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$ テンソルのどの組み合わせも $J_{23} = 0$ の成分を多く持ちすぎているので(1 形式 21 個 と 2 形式なしでは 147 個, 1 形式 14 個と 2 形式 1 個では 120 個, 1 形式 7 個 と 2 形式 2 個では 53 個, 1 形式なしと 2 形式 3 個では 66 個), 少なくとも 1 個の 3 形式を含む必要がある. 階数 $p = 3$ の反対称テンソルは $J_{23} = \pm 1$ を 21 成分と $J_{23} = 0$ を 42 成分含むので, これがちょうど必要なものだ. 結論として, $d = 11$ で $N = 1$ 超対称性の場合に質量ゼロ粒子の唯一の多重項は, 1 個の重力子, 1 個のグラヴィティーノ, そして小群のもとで階数 3

の単一の反対称テンソルとして変換する 1 個の粒子を含む.

$d = 10$ ではより豊富な可能性がある. この場合は $\mathcal{N} = 32$ 個の生成子として 2 通りがある. すなわち, フェルミオン的生成子は自己同型群 $O(2)$ を持つ同じカイラリティの二つの 16 成分ワイル・スピノルを含むか, 自己同型群を持たない異なるカイラリティの二つの16 成分ワイル・スピノルを含む. $d = 10$ では $\mathcal{N} = 16$ だけの独立な成分を持つ一つのフェルミオン的生成子も可能だ. これら三つの可能性は最近の超弦理論で重要な役割を果たしている. すなわち, それぞれのカイラリティを持つ 16 個の生成子の場合はタイプIIA, 同じカイラリティを持つ 32 個の生成子の場合はタイプIIB, 一つのカイラリティだけを持つ 16 個の生成子の場合はヘテロ型, というように3 種類の超弦理論の質量ゼロ粒子のスペクトルを与える.

$d = 10$ で異なるカイラリティをもつタイプ IIA の場合は, $d = 11$ での小群 $O(9)$ の既約表現が$d = 10$ での小群 $O(8)$ の別々の既約表現に別れるという点を除けば, $d = 11$ の場合と同じだ. $O(9)$ 重力子多重項は, $8 \times 9/2 - 1 = 35$ 成分の $O(8)$ 重力子と 8 成分の $O(8)$ ベクトルと, 1 成分のスカラーに分解され, $O(9)$ グラヴィティーノ多重項はそれぞれ $(16 \times 8 - 16)/2 = 56$ 成分の各カイラリティの $O(8)$ グラヴィティーノとそれぞれ 8 成分の各カイラリティの $O(8)$ スピノルに分解され, また, $O(9)$ 3 形式は 56 成分の $O(8)$ 3 形式と 28 成分の $O(8)$ 2 形式に分解される.

$N_+ = 2$ と $N_- = 0$ を持つ $d = 10$ のタイプIIBの場合は, 小群 $O(8)$ の表現と, 超対称性生成子が 2 成分ベクトルとして変換する自己同型群 $O(2)$ の表現を示す量子数 q とに従って状態を分類しなければならない. 重力子が一つしか存在しないので, これは $q = 0$ でなければならない. これらの状態に超対称性生成子を作用させると$q = \pm 1$ で各々 56 成分の二つのグラヴィティーノが得られ, 別の超対称性生成子を作用させると $q = \pm 2$ で各々 28 成分の二つの 2 形式テンソルが得

られ, さらに別の超対称性生成子を作用させると $q=\pm 3$ で各々8成分の二つのワイル・スピノルが得られ, さらに別の超対称性生成子を作用させると $q=\pm 4$ の二つのスカラーと $q=0$ で 35 成分の自己双対 4 形式が得られる.

一つだけのワイル・フェルミオン的生成子を持つ $d=10$ ヘテロ型の場合には, $\mathcal{N}=16$ の独立な成分だけしかない. この場合には, 35 個の独立な成分を持ち $O(8)$ のもとでトレース・ゼロの対称テンソルとして変換する重力子, 56 個の独立な成分を持つグラヴィティーノ, 28 個の独立な成分を持つ $O(8)$ 2 形式, 8 成分のワイル・スピノル, そしてスカラー一つから成る重力子超対称多重項が一つ存在する. (この重力子超対称多重項は 1 状態の $|2\rangle$, $\underset{\sim}{6}$ 状態の $|1\rangle$, 1 状態の $|0\rangle$ に超対称性生成子を作用させて作られ, 全部で $8\times 2^4=128=35+56+28+8+1$ 成分となる.) この場合には, どれかの J_{ij} の固有値が 1 を越えるか -1 を下回る値を持つ粒子は含まないゲージ超対称多重項の可能性もある. これらのゲージ超対称多重項は状態 $|1\rangle$ に超対称性生成子を作用させて作られ, $O(8)$ の 8 成分のベクトル表現に属するゲージ粒子 1 個と $O(8)$ の 8 成分基本ワイル・スピノルとして変換する粒子 1 個を含む.

32.3　p ブレーン

理論によっては粒子に加えて安定な拡がった物体が存在する. それらの物体は, 無限に拡がっている場合もあるし, トポロジー的に非自明な時空の周りに「巻き付く」ことで安定化している場合もある. この種の高次元理論での超対称性と超重力の研究によって, この本の範囲を超えた内容ではあるが, より低次元の時空での弦理論と超対称な場の理論を構成し, またこれらの理論の同等性[4,8] を証明するすばらしい機会が開かれた. ここで我々に関心のあるこれらの拡がった物体

の特徴は, コールマン・マンデューラの定理で許されている以外の保存するボソン量を持つことが可能だという点だ. これらの新しい保存量は超対称性の反交換関係の右辺に運動量演算子や通常の保存量とともに現れ得る.[9]

これまでに調べられてきた中では, 新しい保存するボソン量は全て**形式**, すなわち反対称テンソルだ. 例えば, d 次元時空内の空間次元 p の(「p ブレーン」と呼ばれる)物体は(一般にその物体を覆う重複領域を持つパッチ内の) d 個の時空座標 $x^\mu(\sigma, t)$ を時刻 t とこの物体の位置をパラメータ化する p 個の座標 σ^r の組の関数として指定することで記述される. 与えられた時刻での多様体 $x^\mu = x^\mu(\sigma, t)$ が連続的に 1 点に変形できないという意味でトポロジー的に非自明なら, トポロジー不変積分[*]

$$I^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} = \int d\sigma^1\, d\sigma^2 \cdots d\sigma^p \sum_{r_1=1}^{p} \sum_{r_2=1}^{p} \cdots \sum_{r_p=1}^{p} \epsilon^{r_1\, r_2\, \cdots r_p} \times \frac{\partial x^{\mu_1}(\sigma,t)}{\partial\sigma^{r_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}(\sigma,t)}{\partial\sigma^{r_2}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_p}(\sigma,t)}{\partial\sigma^{r_p}} \tag{32.3.1}$$

がゼロでない値を取り得る. 関数 $x^\mu(\sigma, t)$ の小さな変化のもとでそのような積分が不変なことから, 特にそれが時空の並進のもとで不変であり, よって超対称性生成子の反交換関係の右辺に P^μ や中心電荷とともに現れ得ることが分かる.[10] 反交換関係の右辺に現れるそのよう

---

*この積分がトポロジー不変量であることを見るには, 関数 $x^\mu(\sigma, t)$ の微小な変化 $\delta x^\mu(\sigma, t)$ の効果が $I^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}$ を,

$$\delta I^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} = \sum_{n=1}^{p} \sum_{r_1=1}^{p} \sum_{r_2=1}^{p} \cdots \sum_{r_p=1}^{p} \int d\sigma^1\, d\sigma^2 \cdots d\sigma^p\, \frac{\partial}{\partial\sigma^{r_n}} \left[\epsilon^{r_1\, r_2\, \cdots r_p} \times \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial\sigma^{r_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial\sigma^{r_2}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_{n-1}}}{\partial\sigma^{r_{n-1}}} \delta x^{\mu_n} \frac{\partial x^{\mu_{n+1}}}{\partial\sigma^{r_{n+1}}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial\sigma^{r_p}} \right]$$

だけ変化させ, それはコンパクトな多様体上で積分すればゼロになることに注意すればよい. またそれは, 積分が σ 全体にわたるときには, $\delta x^\mu(\sigma, t)$ が $\sigma^r \to \infty$ で急激にゼロになる条件を満たしている限り, ゼロになる.

なテンソルの係数の計算は, 27.9節で述べた 4 次元の $N=2$ 超対称性理論でのスカラー中心電荷 Z_{rs} のオリーブ・ウィッテンによる計算に類似している. この節ではこれらの係数を計算する事はしないし, 反交換関係に現れ得る他の非トポロジー的な p 形式を調べる事もしないが,[11] 運動量演算子と交換する保存反対称テンソルを含むことで超対称性代数にどのような影響があるかだけを考える.

この可能性によって, 超対称性生成子が常にローレンツ群の基本スピノル表現に属するという重要な結果が影響を受けないことは重要だ. これは, ユークリッド座標での完全反対称テンソルはせいぜい 1 個の時空添字だけが 1 に等しく, またせいぜい 1 個の時空添字だけが d に等しく, したがって (32.1.2) で定義されたその「重み」は ±1 または 0 にしかなれないからだ. 以前と同様に, これは超対称性生成子の重みが ±1/2 以外あり得ないということを意味する. そしてローレンツ不変性から, (32.1.1) で定義された全ての σ が ±1/2 である事が分かり, それは超対称性生成子が $O(d-1,1)$ の基本スピノル表現に属するときにだけ可能だ. また, 超対称性生成子の反交換子の新しい項は運動量と交換するので, 32.1 節と同じ議論から超対称性生成子もまた運動量と交換することが分かる.

ローレンツ不変性より, p 形式の「チャージ」がゼロでない値を持つとき, 反交換関係 (32.1.13) と (32.1.21)–(32.1.22) は (32.1 節と同じ記法を用いて) 以下のような形しか取れないことが分かる.

d が奇数の時,

$$\{Q_r\,,\,Q_s^{\rm T}\} = g_{rs}\gamma^\lambda \mathcal{C} P_\lambda + \sum_p z_{rs}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p}\mathcal{C} \qquad (32.3.2)$$

d が偶数の時,

$$\{Q_r^{\pm}\,,\,Q_s^{\mp(-1)^{d/2}\,{\rm T}}\} = \left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)$$

$$\times \left[g^{\pm}_{rs}\gamma^{\lambda}\mathcal{C}P_{\lambda} + \sum_{\text{odd } p} z^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p\ \pm}_{rs}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p}\mathcal{C} \right] , \quad (32.3.3)$$

$$\{Q^{\pm}_r\,,\,Q^{\pm(-1)^{d/2}\,\mathrm{T}}_s\} = \left(\frac{1\pm\gamma_{d+1}}{2}\right)$$

$$\times \sum_{\text{even } p} z^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p\ \pm}_{rs}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p}\mathcal{C}\,. \quad (32.3.4)$$

(反交換関係に $\mathcal{C}$ が現れるのは $\mathcal{J}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = -\mathcal{C}^{-1}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C}$ のためだ. また, $Q^{\pm}_r$ は d が偶数の場合の超対称性生成子で $\gamma_{d+1}Q^{\pm}_r = \pm Q^{\pm}_r$ だ. また $\mathcal{C}^{-1}\gamma_{d+1}\mathcal{C} = (-1)^{d/2}\gamma_{d+1}$ だ.) d が偶数の場合は,

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p} \propto \gamma_{d+1}\gamma_{\mu_{p+1}}\gamma_{\mu_{p+2}}\cdots\gamma_{\mu_d}\ ,$$

で, d が奇数の場合は,

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p} \propto \gamma_{\mu_{p+1}}\gamma_{\mu_{p+2}}\cdots\gamma_{\mu_d}$$

となる. こうして p ブレーンと $d-p$ ブレーンは任意の d で (32.3.2)–(32.3.4) に同じ寄与をする. したがって d が偶数の場合 p は 0 から $d/2$ の値のみを取り, d が奇数の場合は 0 から $(d-1)/2$ の値のみを取るように制限してもよい.

反交換子の対称性は (32.3.2)–(32.3.4) の p ブレーンの中心電荷 z^p_{rs} の対称性条件に反映されている. (32.A.15) と (32.A.30) から, $d = 2n$ と $d = 2n+1$ の両方で,

$$\gamma^{\mathrm{T}}_{\mu} = (-1)^n\mathcal{C}^{-1}\gamma_{\mu}\mathcal{C}\,, \qquad \mathcal{C}^{\mathrm{T}} = (-1)^{n(n+1)/2}\mathcal{C} \quad (32.3.5)$$

が成り立つ. これらより反対称積 $\gamma_{[\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p]}$ は対称性

$$\begin{aligned}\gamma_{[\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p]}\mathcal{C} &= (-1)^{pn}(-1)^{n(n+1)/2}\left[\gamma_{[\mu_p}\gamma_{\mu_{p-1}}\cdots\gamma_{\mu_1]}\mathcal{C}\right]^{\mathrm{T}} \\ &= (-1)^{pn}(-1)^{n(n+1)/2}(-1)^{p(p-1)/2}\left[\gamma_{[\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p]}\mathcal{C}\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \quad (32.3.6)$$

を持つ. d が奇数の場合は,

$$z_{rs}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} = (-1)^{pn}(-1)^{n(n+1)/2}(-1)^{p(p-1)/2} z_{sr}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p} \qquad (32.3.7)$$

また d が偶数の場合は,

$$z_{rs}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p \pm} = (-1)^{pn}(-1)^{n(n+1)/2}(-1)^{p(p-1)/2} z_{sr}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p\,(-1)^n(-1)^p\mp} \qquad (32.3.8)$$

を満たすことはすぐに分かる.

例えば, 弦理論のよく知られた M 理論による一般化の一つである $d = 11$ 時空次元での $N = 1$ 超対称性という重要な場合を考える. (32.3.8) より単一の p 形式中心電荷 $z^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}$ は,

$$-(-1)^p(-1)^{p(p-1)/2} = +1 \qquad (32.3.9)$$

でなければゼロとなることが分かる. この条件は p が 1, 2, 5 のときにだけ満たされる. 値 $p = 1$ は, 粒子と拡がった物体の両方から生じる運動量演算子そのものによって実現している. 他の可能性の $p = 2$ と $p = 5$ はそれぞれ 2 ブレーンと 5 ブレーンを持つ理論で生じる. 1 ブレーンから生じる 1 形式のようなこれ以外の独立なテンソル中心電荷は存在できない. なぜなら, P^μ と 2 形式および 5 形式の独立な成分の数は,

$$11 + \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} = 528$$

で, 一方二つの 32 成分基本スピノルの反交換子の独立な成分の数は $32 \times 33/2 = 528$ だからだ.

ちょうど 0 形式の電荷が 1 形式のゲージ場 $A_\mu(x)$ の源になるように, p 形式の保存量 $z^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_p}$ も 8.8 節で議論した種類の $p+1$ 形式ゲージ場 $A_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p+1}}$ の源の働きをする. 実際, そのようなゲージ場は超重力理論で現れる. 例えば, 前節で述べたように, $d = 11$ 時空次元での $N = 1$ 超重力理論は $O(9)$ 小群の 3 形式表現に属する質量ゼロ粒

子を含むので, 3 形式ゲージ場 $A_{\mu\nu\rho}(x)$ で記述されなければならない. この超重力理論の解の研究から, 確かに $A_{\mu\nu\rho}(x)$ の源となる 2 ブレーン[12]が存在することが分かる. また, 8.8節で述べたように, このゲージ理論は $(d-p-2=6)$ 形式ゲージ場を持つ理論と同等で, その理論は 5形式 $z^{\mu_1\cdots\mu_5}$ を源として持つことができ, 実際この 6 形式ゲージ場のそのような源となる5ブレーン解が存在する.[13] $N=1$ の 11 次元超対称性代数は確かにこれらの2ブレーンと5ブレーンから寄与を受ける.[11]

補遺：高次元スピノル

この補遺では任意の d 次元時空でのローレンツ群 $O(d-1,1)$ のリー代数の基本スピノル表現について説明する. これは反交換関係

$$\{\gamma_\mu\,,\,\gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \tag{32.A.1}$$

を満たす有限行列 γ_μ の既約な組で構成される対応するクリフォード代数から得られる. ここで $\eta_{\mu\nu}$ は, x^0 を時間成分として $\eta_{00}=-1$ 以外の対角要素が $+1$ の対角行列だ. これらから行列

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4i}[\gamma_\mu\,,\,\gamma_\nu] = -\mathcal{J}_{\nu\mu} \tag{32.A.2}$$

を構成できる. これはローレンツ群の生成子の交換関係 (2.4.12)

$$i\,[\mathcal{J}_{\mu\nu},\mathcal{J}_{\rho\sigma}] = \eta_{\nu\rho}\mathcal{J}_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}\mathcal{J}_{\nu\sigma} - \eta_{\sigma\mu}\mathcal{J}_{\rho\nu} + \eta_{\sigma\nu}\mathcal{J}_{\rho\mu} \tag{32.A.3}$$

を満たす. 以下で見るように, (32.A.2) はローレンツ代数の表現を与えるが, 常に既約というわけではない.

そこで偶数次元の場合と奇数次元の場合を区別する必要がある.

偶数次元：$d = 2n$

$d = 2n$ 次元ガンマ行列の便利な特定の表現を構成するために, n 個の行列

$$a_u \equiv \frac{1}{2}\Big(\gamma_{2u-1} + i\,\gamma_{2u}\Big) \qquad u = 1,\, 2,\, \ldots,\, n \tag{32.A.4}$$

を導入し, $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$ はエルミートで, 通常どおり,

$$\gamma_{2n} \equiv -i\gamma_0 \tag{32.A.5}$$

とする. これらは反交換関係

$$\{a_u\,,\, a_v^\dagger\} = \delta_{uv}\;, \qquad \{a_u\,,\, a_v\} = \{a_u^\dagger\,,\, a_v^\dagger\} = 0 \tag{32.A.6}$$

を満たす. 条件

$$a_u^\dagger\,|0\rangle = 0 \tag{32.A.7}$$

で定義された γ の表現空間のベクトル $|0\rangle$ を導入し, 基底ベクトル

$$|s_1\; s_2\; \cdots s_n\rangle = a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}\,|0\rangle \tag{32.A.8}$$

を定義する. $a_u^2 = 0$ なので, 演算子 a_u は $s_u = 0$ なら s_u の値を $+1$ に上げ, $s_u = +1$ ならベクトルをゼロにする (同時に $S \equiv \sum_{v<u} s_v$ として符号 $(-1)^S$ が生じる). よって全ての s_u は値 0 と $+1$ のみを取り, したがってこれらのベクトルは次元 2^n の空間を張る. この基底では, 行列 a_u は,

$$a_u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1 \cdots \otimes 1 \tag{32.A.9}$$

の形を取る. ただし最後の 2×2 行列は u 番目の位置だ. エルミート部分と反エルミート部分を取ると, ガンマ行列

$$\gamma_{2u-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1 \cdots \otimes 1\,, \tag{32.A.10}$$

$$\gamma_{2u} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes 1 \cdots \otimes 1 \tag{32.A.11}$$

が得られる. (これは 4 次元時空では, 5.4 節で導入しこの本で一貫して使ってきたガンマ行列の表現と同じではない.)

(32.A.10)–(32.A.11) の表現はユークリッドの γ に, $i = 1, 2, \ldots, 2n$ として,

$$\gamma_i^* = \gamma_i^{\mathrm{T}} = \begin{cases} \gamma_i & i\text{ が奇のとき}, \\ -\gamma_i & i\text{ が偶のとき} \end{cases} \tag{32.A.12}$$

という単純な実の性質と対称性を与える. これは相似関係

$$\mathcal{C}^{-1}\gamma_i\mathcal{C} = (-1)^n\,\gamma_i^{\mathrm{T}} = (-1)^n\,\gamma_i^* \tag{32.A.13}$$

として表現できる. ここで $\mathcal{C}$ は,

$$\mathcal{C} \equiv \gamma_2\gamma_4\cdots\gamma_{2n} \tag{32.A.14}$$

の行列だ. (32.A.5) の $-i$ 因子を考慮すると, これはミンコフスキー成分について,

$$\gamma_\mu^* = -\beta\gamma_\mu^{\mathrm{T}}\beta = -(-1)^n(\mathcal{C}\beta)^{-1}\gamma_\mu(\mathcal{C}\beta) \tag{32.A.15}$$

と書くことができる. ここで,

$$\beta \equiv \gamma_{2n} = -i\gamma_0 \tag{32.A.16}$$

の定義を使った.

任意の偶数次元で 4 次元の γ_5 と同様の役割をする行列 γ_{2n+1} を定義できる. そのような行列として,

$$\gamma_{2n+1} \equiv i^n\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{2n} \tag{32.A.17}$$

を取る. ここで位相は,

$$\gamma_{2n+1}^2 = 1 \tag{32.A.18}$$

を満たすように選んである. 反交換関係 (32.A.1) から直ちに γ_{2n+1} は他の全ての行列と反可換であることが分かる.

$$\{\gamma_{2n+1}\,,\,\gamma_\mu\} = 0 \quad \text{ただし}\ \mu = 1, 2, \ldots, 2n-1, 0\,. \tag{32.A.19}$$

γ_{2n+1} が実で対称なことは容易に確認できる.

$$\gamma_{2n+1}^\dagger = \gamma_{2n+1}^* = \gamma_{2n+1}^{\mathrm{T}} = \gamma_{2n+1}\,. \tag{32.A.20}$$

(32.A.19) から γ_{2n+1} は $O(2n-1,1)$ 代数の生成子 (32.A.2) と交換する, つまり,

$$[\gamma_{2n+1}\,,\,\mathcal{J}_{\mu\nu}] = 0 \tag{32.A.21}$$

だと分かるので, $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ は $O(2n-1,1)$ 代数の既約表現を持つことはできない. その代わりに, 以下のように $\gamma_{2n+1} = \pm 1$ の部分空間に射影することで「ワイル」既約表現の対を定義できる.

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}^{\pm} \equiv \mathcal{J}_{\mu\nu}\left(\frac{1 \pm \gamma_{2n+1}}{2}\right)\,. \tag{32.A.22}$$

(32.A.15) と関係式 $(\mathcal{C}\beta)^{-1}\gamma_{2n+1}\mathcal{C}\beta = -(-1)^n\gamma_{2n+1}$ からワイル・ローレンツ生成子の複素共役と転置が,

$$(\mathcal{J}_{\mu\nu}^{\pm})^* = -(\mathcal{C}\beta)^{-1}\mathcal{J}_{\mu\nu}^{\mp(-1)^n}(\mathcal{C}\beta)\,, \tag{32.A.23}$$

$$(\mathcal{J}_{\mu\nu}^{\pm})^T = -\mathcal{C}^{-1}\mathcal{J}_{\mu\nu}^{\pm(-1)^n}\mathcal{C} \tag{32.A.24}$$

となることが分かる. したがって, n が偶数の場合, ワイル既約表現は複素共役と互いに同値だが, 他方 n が奇数の場合には, 各表現は自分自身の複素共役と同値だ.* n が奇数の場合には, さらにワイル表現が

---

*($\mathcal{J}_{\mu\nu}$, $\mathcal{J}_{\mu\nu}^+$, $\mathcal{J}_{\mu\nu}^-$ のような) 行列 $\mathcal{L}_{\mu\nu}$ によるローレンツ代数の一つの表現が, 行列 $\mathcal{L}'_{\mu\nu}$ による別の表現の複素共役だと言うのは, $\mathcal{L}'_{\mu\nu} = -\mathcal{L}_{\mu\nu}^*$ の場合だ. 負符号が含まれているのは, ローレンツ群の単位元近傍での元を表す行列は $1 + \frac{1}{2}i\omega^{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mu\nu}$ の形をしていて $\omega^{\mu\nu}$ は微小な実数だからだ.

実か擬実かを決める必要がある．前者は，

$$-(\mathcal{S}\mathcal{J}^{\pm}_{\mu\nu}\mathcal{S}^{-1})^* = \mathcal{S}\mathcal{J}^{\pm}_{\mu\nu}\mathcal{S}^{-1} \tag{32.A.25}$$

を満たす行列 $\mathcal{S}$ が存在することを意味し，後者の場合はそのような $\mathcal{S}$ が存在しない場合だ．(32.A.23) を使うと，条件 (32.A.25) は $\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}^*(\mathcal{C}\beta)^{-1}$ が全ての $\mathcal{J}^{\pm}_{\mu\nu}$ と交換するという条件として書ける．行列 $\mathcal{J}^{\pm}_{\mu\nu}$ は既約な組を成すので，この事は，$\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}^*(\mathcal{C}\beta)^{-1}$ が単位行列に比例する，すなわち，α を定数として，

$$\mathcal{C}\beta = \alpha\mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}^* \tag{32.A.26}$$

となることを要求する．これが可能であるには，

$$\mathcal{C}\beta\,(\mathcal{C}\beta)^* = |\alpha|^2 \cdot 1 \tag{32.A.27}$$

でなければならない．しかし，$\mathcal{C}\beta = \gamma_2\gamma_4\cdots\gamma_{2n-2}$ であり，i が偶数の全ての γ_i は虚なので，

$$\mathcal{C}\beta(\mathcal{C}\beta)^* = (-1)^{n-1}(\gamma_2\gamma_4\cdots\gamma_{2n-2})^2 = (-1)^a \cdot 1 \tag{32.A.28}$$

となる．ここで，

$$a = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = n(n-1)/2 \tag{32.A.29}$$

と定義している．したがって，ワイル表現は $n = 1 \pmod 4$ の場合にだけ実で，$n = 3 \pmod 4$ の場合は擬実でなければならない．

32.1 節で使うために，

$$\mathcal{C}^* = (-1)^n\mathcal{C}\,, \quad \mathcal{C}^{\mathrm{T}} = (-1)^{n(n+1)/2}\mathcal{C}\,, \quad \mathcal{C}^{-1} = (-1)^{n(n-1)/2}\mathcal{C}\,, \tag{32.A.30}$$

が成り立ち，したがって (32.A.13) より，

$$(\mathcal{C}\gamma_\mu)^{\mathrm{T}} = (-1)^{n(n-1)/2}\mathcal{C}\gamma_\mu \tag{32.A.31}$$

が成り立つことに注意する.

γ_μ は,

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu}, \gamma_\rho] = -i\gamma_\mu\eta_{\nu\rho} + i\gamma_\nu\eta_{\mu\rho} \tag{32.A.32}$$

の意味でベクトルを成し,

$$\beta\,\gamma_0\,\beta = +\gamma_0\ , \quad \beta\,\gamma_i\,\beta = -\gamma_i \ \ \text{for}\ \ i = 1, \ldots, 2n-1 \tag{32.A.33}$$

の意味で通常のパリティを持つ. 反交換関係 (32.A.1) の結果, γ の対称な積から新しいテンソルを構成することはできないが, 階数 $2n$ までの反対称テンソル

$$\gamma_{[\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p]} \tag{32.A.34}$$

を構成することが可能だ. ここで角括弧は反対称化を表し, $p \leq 2n$ だ. 各々は 2 項係数 $\begin{pmatrix} 2n \\ p \end{pmatrix}$ だけの個数の独立な時空成分を持つので, この種の行列の総数は,

$$\sum_{p=0}^{2n} \begin{pmatrix} 2n \\ p \end{pmatrix} = 2^{2n} \tag{32.A.35}$$

となる. これらは (2 乗を計算すれば分かるように) どれもゼロではなく, 全て異なるローレンツ変換則および (または) パリティ変換則を持ち, よって線形独立で, したがって任意の $2^n \times 2^n$ 行列は 2^{2n} 個の反対称テンソル (32.A.34) の線形結合として書くことができる.

奇数次元: $d = 2n + 1$

次に奇数の時空次元 $d = 2n+1$ を考察する. 反交換関係 (32.A.1) を満たす $2n+1$ 個の $n \times n$ ディラック行列の組を見つけるのは容易だ. それは単に $d = 2n$ のときと同じ γ_μ, ただし $\mu = 1, 2, \ldots 2n-1, 0$, を使い, それに (32.A.17) で定義した行列 γ_{2n+1} を加えればよい. (32.A.18) と (32.A.19) よりこれらのガンマ行列は反交換関係 (32.A.1) を満たす.

ただし, μ と ν は $1, 2, \ldots, 2n-1, 0, 2n+1$ の値を取り, 以前と同じく $\gamma_0 = i\gamma_{2n}$ だ.

偶数次元の場合と異なり, 今の場合は全てのローレンツ生成子と交換する自明でない行列を見つけることはできない. なぜなら (32.A.17) と (32.A.18) より, $2n+1$ 個のガンマ行列の積は,

$$\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{2n}\gamma_{2n+1} = i^{-n}\cdot 1 \tag{32.A.36}$$

となり自明だからだ. したがって μ と ν が $1, 2, \ldots, 2n-1, 0, 2n+1$ の値を走るローレンツ生成子 (32.A.2) はそれ自身でローレンツ群の既約表現を構成する. それらが実の性質を持つことを確認するには, γ_{2n+1} が実対称で $(\mathcal{C}\beta)^{-1}\gamma_{2n+1}\mathcal{C}\beta = -(-1)^n\gamma_{2n+1}$ を満たし, よって (32.A.15) が $\mu = 1, 2, \ldots, 2n-1, 0$ だけでなく $\mu = 2n+1$ についても成り立つことに注意すればよい. したがってローレンツ生成子は,

$$\mathcal{J}^*_{\mu\nu} = -(\mathcal{C}\beta)^{-1}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C}\beta\,, \tag{32.A.37}$$

$$\mathcal{J}^{\mathrm{T}}_{\mu\nu} = -\mathcal{C}^{-1}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C} \tag{32.A.38}$$

を満たし, よって各奇数次元で基本スピノル表現は実か擬実だ. $d = 2n$ の場合と全く同じ議論から, ここでも $d = 2n+1$ のスピノル表現は (32.A.28) の符号 $(-1)^a$ が正か負かに応じて実か擬実だと分かり, よって (32.A.29) に従って $n = 0 \pmod 4$ と $n = 1 \pmod 4$ のとき実で, $n = 2 \pmod 4$ と $n = 3 \pmod 4$ のとき擬実だと分かる.

以前と同様に反対称テンソル (32.A.34) を構成することができ, 今度は階数 p は $2n+1$ 以下だが, この内半分だけが独立だ. なぜならこれらには, $\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2n+1}}$ を通常どおり完全反対称として,

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2n+1}}\gamma_{[\mu_1}\gamma_{\mu_2}\cdots\gamma_{\mu_p]} \propto \gamma^{[\mu_{p+1}}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_{2n+1}]} \tag{32.A.39}$$

の関係があるからだ. ($d = 2n$ の場合はそのような関係は不可能だ. なぜなら (32.A.39) の左辺と右辺はパリティが逆だからだ. しかし

$d=2n+1$ の場合には $\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{2n+1}}$ の空間パリティは偶なのでこの議論が成り立たない.) (32.A.34) の形の独立な行列の総数は,

$$\sum_{p=0}^{n}\begin{pmatrix} 2n+1 \\ p \end{pmatrix} = 2^{2n} \tag{32.A.40}$$

で与えられ, 任意の $2^n \times 2^n$ 行列は $0 \le p \le n$ の 2^{2n} 個の独立な反対称テンソル (32.A.34) の線形結合で書くことができる.

最後に, $d=2n$ か $d=2n+1$ のどちらかで,

$$\gamma_{2n} \equiv -i\gamma_0 \;, \qquad \mathcal{J}_{i\,2n} \equiv -i\mathcal{J}_{i0} \tag{32.A.41}$$

と置くと, $O(d-1,1)$ ディラック代数およびローレンツ代数は対応する $O(d)$ 代数と,

$$\{\gamma_i\,,\,\gamma_j\} = 2\delta_{ij} \tag{32.A.42}$$

および,

$$\mathcal{J}_{ij} = \frac{1}{4i}[\gamma_i\,,\,\gamma_j] = -\mathcal{J}_{ji} \tag{32.A.43}$$

で関係している. ここで i と j は 1 から d の値を走る. (32.A.42) より $i \neq j$ のとき $\mathcal{J}_{ij}^2 = 1/4$ なので, 各 $\mathcal{J}_{ij}$ の固有値は $\pm 1/2$ に限られる. 特に, 基本スピノル表現ではカルタン部分代数の生成子は,

$$\mathcal{J}_{2u-1\;2u} = \frac{1}{2}[a_u\,,\,a_u^*] = a_u a_u^* - \frac{1}{2} \tag{32.A.44}$$

で表され, 基底ベクトル (32.A.8) はその固有ベクトルで,

$$\mathcal{J}_{2u-1\;2u}\Big|s_1\ s_2\ \cdots s_n\Big\rangle = \left(s_u - \frac{1}{2}\right)\Big|s_1\ s_2\ \cdots s_n\Big\rangle \tag{32.A.45}$$

を満たす. 次元 $d=2n$ と $d=2n+1$ の違いは, $d=2n$ では γ_{2n+1} の固有値 $(-2\sigma_1)(-2\sigma_2)\cdots(-2\sigma_n)$ が$+1$ か -1 に制限されている二つの基本スピノル表現が存在するが, $d=2n+1$ では σ_u についてそのような制限のない一つの基本スピノル表現が存在する.

32.1節で基本スピノル表現をフェルミオン的対称性の生成子が持つことのできるローレンツ代数の唯一可能な表現と同定したのは, まさに各 $\mathcal{J}_{ij}$ の固有値が $\pm 1/2$ に制限されているという事実によってだった. 実際, この条件から $O(d)$ 生成子が (32.A.8) の形の基底で $s_u = \sigma_u + 1/2$ で表されると推論し, この補遺の導出を逆に辿って, (32.A.4)–(32.A.7) を使って (d が奇数の場合は (32.A.17) も使って) ローレンツ生成子を反交換関係 (32.A.1) を満たす γ_μ の組で表すことができた.

問題

1. 全ての中心電荷がゼロのとき, 6 次元時空の可能な各種の超対称性での質量ゼロ粒子の多重項を分類せよ.

2. $j = 3$ までの全てのスピンについて質量ゼロ粒子が可能だが, それより大きいスピンについては不可能とする. スピン 2 の質量ゼロ粒子が存在する事実を考慮すると, 超対称性が可能な最大の時空次元はいくらか. また, 可能な各時空次元で超対称性生成子の最大数はいくらか.

3. 10次元時空でのタイプ IIA と IIB 超対称性を考える. 拡張された超対称性の反交換関係にスカラー中心電荷のみが現れると仮定する. 粒子の質量の下限を求め, これらの中心電荷を用いて表せ. 質量がこの下限値を取る粒子に許される質量がゼロでない「BPS」多重項を説明せよ.

4. 9 次元時空の $N = 1$ 超対称性で可能な独立なスカラーおよび(または) テンソル中心電荷を挙げよ.

参考文献

1. T. Kaluza, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.* **K1**, 966 (1921).

2. O. Klein, *Z. Phys.* **37**, 895 (1926); *Nature* **118**, 516 (1926).

3. J. H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B46**, 61 (1972); R. C. Brower and K. A. Friedman, *Phys. Rev.* **D7**, 535 (1972).

4. 11次元時空での超重力場の理論は以下の論文で定式化された. E. Cremmer, B. Julia, and J. Scherk, *Phys. Lett.* **76B**, 409 (1978). 10次元時空での弱結合のタイプ IIA 弦理論が11次元に起源を持つという考え方は, M. J. Duff, P. S. Howe, T. Inami, and K. Stelle, *Phys. Lett.* **B191**, 70 (1987) による. このことは 10 次元での強結合のタイプ IIA 弦理論については, P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B350**, 184 (1995) で示された. これらの理論と他の全ての 10 次元弦理論との関係は, E. Witten, *Nucl. Phys.* **B445**, 85 (1995) で示された.

5. R. Haag, J. Lopuszanski, and M. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B88**, 257 (1975).

6. W. Nahm, *Nucl. Phys.* **B135**, 149 (1978).

6*a*. 例えば, H. W. Turnbull and A. C. Aitkens, *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* (Dover Publications, New York, 1961) を見よ.

6*b*. 有用な概説が J. Strathdee, *Int. J. Mod. Phys.* **A2**, 273 (1987) にある.

7. 4次元時空でのこれらの議論については以下を見よ. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **135**, B1049 (1964); *Phys. Rev.* **138**, B988 (1965); R.

P. Feynman, 未出版; M. T. Grisaru and H. N. Pendleton, *Phys. Lett.* **67B**, 323 (1977). 高次元時空での議論は同様だ.

8. 例えば, J. Hughes, J. Liu, and J. Polchinski, *Phys. Lett.* **B180**, 370 (1986); E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B189**, 75 (1987); A. Achúcarro, J. M. Evans, P. K. Townsend, and D. L. Wiltshire, *Phys. Lett.* **B198**, 441 (1987); P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B202**, 53 (1988); P. K. Townsend, in *Particles, Strings, and Cosmology: Proceedings of Workshop on Current Problems in Particle Theory 19 at Johns Hopkins University, March 1995* (World Scientific, Singapore, 1996); J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) を見よ. 概説としては以下を見よ. M. J. Duff, R. R. Khuri, and J.-X. Lu, *Phys. Rep.* **259**, 213 (1995); A. Giveon and D. Kutasov, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 983 (1999).

9. J. W. van Holten and A. Van Proeyen, *J. Phys. A: Math. Gen.* **15**, 3763 (1982).

10. J. A. de Azcárraga, J. P. Gauntlett, J. M. Izquierdo, and P. K. Townsend *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2443 (1989).

11. D. Sorokin and P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **B412**, 265 (1997); J. P. Gauntlett, J. Gomis, and P. K. Townsend, *J. High Energy Phys.* **9801**, 003 (1998).

12. これらの 2 ブレーンの共変な場の方程式は, E. Bergshoeff, E. Sezgin, P. K. Townsend, 文献 8 と *Ann. Phys. (NY)* **185**, 330 (1988) で与えられた. これらの2ブレーンが3形式ゲージ場の源となる超重力場の方程式の解であることは, M. J. Duff and K. Stelle, *Phys. Lett.* **B253**, 113 (1991) で示されている.

13. これらの5ブレーンが6形式ゲージ場の源を与える超重力場の方程式の解であることは, R. Gueven, *Phys. Lett.* **B276**, 49 (1992) で与えられた. この5ブレーンの共変な場の方程式は以下で与えられた. M. Aganagic, J. Park, C. Popescu, and J. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B496**, 191 (1997); P. S. Howe and E. Sezgin, *Phys. Lett.* **B394**, 62 (1997); P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *Phys. Lett.* **B398**, 41 (1997); P. S. Howe, E. Sezgin, and P. C. West, *Phys. Lett.* **B399**, 49 (1997); I. Bandos, K. Lechner, A. Nurmagambetov, P. Pasti, D. Sorokin, and M. Tonin, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4332 (1997).

訳者あとがき

本シリーズは, Steven Weinberg 氏の “The Quantum Theory of Fields” I, II, III 巻の日本語訳である. このシリーズでは, Weinberg 氏は一貫して場の量子論の論理性を軸に議論を進めている. つまり, 真の基本理論は弦理論や, その奥から姿を現しつつある理論であっても, 場の量子論は量子力学と特殊相対性理論の基本的要請から我々の世界を記述する有効理論として成立するというのが著者の視点だ. この意味で, 同じ時期に出た他の場の量子論の本と比べても, このシリーズは非常にユニークなものであるといえる.

原著 I 巻は, 日本語訳では 1, 2 巻に分冊した. 1 巻では, 場の量子論自身の構成が詳細に議論され, その後に実際の物理的過程を計算するためのファインマン則が述べられた. 2 巻では, 場の量子論形式が正準理論, 経路積分と述べられ, くりこみ等が議論された.

原著 II 巻では原著 I 巻で述べた場の量子論の基礎に基づいて, 各種の重要な概念が論じられる. この原著 II 巻は日本語訳 3, 4 巻に分冊した. 3巻では, 現代の素粒子論における標準理論の基礎をなす非可換ゲージ理論が導入され, 有効場の理論, くりこみ群, 大局的対称性の自発的破れの理論に基づく解析が, それらの一般論とともに有機的に展開された. 4巻では, 演算子積展開, ゲージ対称性の自発的破れ, アノマリー, 拡がりのある場の配位などが論じられた.

原著 III 巻では一転して, 超対称性へと話が進む. これもI巻, II巻と同様に日本語訳では 5, 6 巻へと分冊した. 5巻では, 超対称性の発見に至るまでの歴史的経緯を最初に述べた後, 超対称性を持つ場の量子論、特にゲージ理論の構成、超対称な標準模型などが調べられた。この第6巻では、それらの基礎の上に、超対称性の非摂動論的局面と超対称性の超重力への拡張、高次元での一般論等が述べられている.

非摂動論的な性質は、超対称性の破れを決定する上で本質的であり、一般の場の理論における現象についても理解を深めるのにも役立つ。超重力は超弦理論をはじめとする重力を含む場の量子論の構成に不可欠であると同時に、超対称性を破る機構に関与する。また本書は、高次元時空での超対称性に関係してpブレーンに関係した最近の話題にも触れており、本シリーズの締めくくりにふさわしい意欲的な取り組みとなっている。

本書は、超対称性について本格的に学ぼうとする学生にも、すでに研究に従事している理論研究者のレビューとしても、さらに高エネルギー実験に携さわり超対称性を発見しようとしている研究者の座右の書としても有用であり、必須の一冊となるであろう。

なお、著者も本書の序文で述べているように, 本書では必ずしも 1–4 巻を読破していることを前提としていない. しかし, 実際には随所でそれらが参照されているので, 詳しく学びたいという読者には 1–4 巻を手元に置かれるのをお奨めする. 参考までに本書の目次の直後に 1–4 巻と5巻の目次も添えておいた.

この本を作るにあたって, 著者 S. Weinberg 氏には快く Cambridge University Press との仲介の労をとっていただき, また翻訳作業中に生じた疑問にも答えていただいた. ここに感謝の意を表したい.

また, 本書の出版に際し, 吉岡書店の前田重穂氏に大変お世話になった. ここに記して感謝する.

2003 年 3 月 訳者一同

索引

人名

イタリック体のページ番号は「関連書誌」と
「参考文献」に引用した文献を示す.

日本語事項

英 語 事 項

ISBN4-8427-0000-9

訳者略歴

青山　秀明（あおやま　ひであき）

1976 年：京都大学理学部物理学科卒

1982 年：カリフォルニア工科大学博士課程修了．Ph.D

1982–1988 年：スタンフォード線形加速器センター理論部研究員，ハーバード大学客員研究員等

1988 年：京都大学理学部助手

1989–1997 年：京都大学教養部・総合人間学部助教授

1998–2003 年：京都大学総合人間学部基礎科学科教授

現在：京都大学大学院理学研究科教授

著書に「力学」（学術図書出版社）

訳書に「物理学演習モスクワの森」（コゼル他編，吉岡書店）（共訳），「場の理論－統計論的アプローチ」（パリージ著，吉岡書店）（共訳），「経路積分法」（スワンソン著，吉岡書店）（共訳）

有末　宏明（ありすえ　ひろあき）

1976 年：京都大学理学部物理学科卒

1982 年：京都大学理学博士

1982–1983 年：日本学術振興会奨励研究員

1983–1985 年：京都大学基礎物理学研究所研究員

1985–2000 年：大阪府立工業高等専門学校助教授

2000 年－現在：大阪府立高等専門学校教授

訳書に「Maple V 数学解法辞典」（デビット著，オーム社（共訳））

杉山　勝之（すぎやま　かつゆき）

1990 年：東京大学理学部物理学科卒

1995 年：東京大学理学系研究科博士課程修了．理学博士

1995–1996 年：京都大学基礎物理学研究所湯川奨学生，日本学術振興会特別研究員

1996–2003 年：京都大学総合人間学部基礎科学科助手

現在：京都大学大学院理学研究科助手

S. Weinberg：場の量子論（6 巻）　超対称性：非摂動論的効果と拡張　2003 ©

2003 年 4 月 5 日　　第 1 刷発行

訳　者　青　山　秀　明
有　末　宏　明
杉　山　勝　之

発行者　吉　岡　　誠

606-8225 京都市左京区田中門前町 87

株式会社　吉　岡　書　店

（物理学叢書 94 巻）

電話（075）781-4747／振替　01030-8-4624

印刷・製本（株）太洋社

ISBN4-8427-0293-1

「物理学叢書」刊行に際して

二十世紀の物理学の進歩は，物質の極微の構造の暴露に，物質の精妙な機構の解明に，驚異的な発展，飛躍をもたらした．その結果，新しい自然力の解放，支配を実現化したばかりでなく，新しい物質の創造，生命の謎への挑戦をも企画せしめつつある．更に，既知の自然力の未曾有の強力な駆使さえ可能にしつつある．二十世紀後半に至って，原子力に，あるいはオートメーションに今や第二の産業革命を喚起せんとするに至った原動力は，物理学の開拓的な創造性によることは言をまたない．更に，現在の物理学は，かつての相対論，量子論の出現にも比すべき革命の前夜にあるといわれているこの時に当たり，物理学の新領域の単なる解説，あるいは時局的な技術書ではなく，真にわが国物理学の発展の糧となるべき良書の出版は緊急の必要事といわねばならぬ．ここに「物理学叢書」を編んで世に送る所以である．

この叢書に収められる原著は，いずれもそれぞれの分野の世界的権威者による定評ある名著に限られるが，前述の精神に鑑みその性格，スタイルに特徴あるものを選ぶと共に，その本質において創造的価値高きものを目標とした．

この叢書が，物理学またはその関連分野へ進む学徒に，よき伴侶として用いられ，真にその血肉となり得ることがわれわれの念願であり，更にこの叢書によって伝えられる海外の学風が，広くわが国の教育，研究へのよき刺戟となり，わが国の明日の科学を築く基礎に貢献するところがあれば幸いである．

(1954年12月)

キャレン　小田垣　孝訳
熱力学および統計物理入門 上・下
第2版　上330頁　下368頁

世界的に高い評価を得ている熱力学の代表的な教科書である．公理に基づく熱力学大系の構築は他に類をみない．上巻では平衡状態を定める条件が論じられ，下巻では相転移の熱力学への導入が詳しく論じられる．

チェイキン，ルベンスキー　松原武生・東辻千枝子他訳
現代の凝縮系物理学
上 396頁　下 376頁

凝縮系の物理学を現代的な視点で扱った待望の書．臨界現象とくりこみ群の方法に特に注目し，扱う対象は液体・結晶・不整合結晶・準結晶・非晶質系に及ぶ．250以上の図，多くの演習問題，文献リストを含む．

ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳
粒子と量子場
場の量子論シリーズ①　432頁

簡単な歴史的記述から入り，相対性原理と量子力学の理論を用いて素粒子の性質を論じることにより「場の量子論」が自然の帰結として現れてくる．貴重な参考文献であると同時に，教科書として適切である．

ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳
量子場の理論形式
場の量子論シリーズ②　446頁

本書は S. Weinberg による「場の量子論」全6巻の第2巻である．正準形式，ファイマン則，量子電磁理論，経路積分，くりこみ，などの理論形式の核となる部分が論じられる．

ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳
非可換ゲージ理論
場の量子論シリーズ③　376頁

現代の素粒子論における標準理論の基礎をなす非可換ゲージ理論が導入され，また場の理論の現代的手法である有効場の理論，くりこみ群，大域的対称性の自発的破れの一般論が展開される．

ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳
場の量子論の現代的諸相
場の量子論シリーズ④　342頁

くりこみ群や対称性の破れにとって重要な演算子積展開，電弱理論のゲージ対称性の自発的破れが論じられる．これとは対称的に量子力効果として対称性を破るアノマリーと，それによる物理的結論が述べられる．

ワインバーグ　青山・有末・杉山訳
超対称性：構成と超対称標準模型
場の量子論シリーズ⑤　380頁

最初に超対称性の歴史について述べ，超対称性代数を構成する．その後，超対称性を持つ場の理論，ゲージ理論を構成し，それらに基づき，標準模型を超対称性を持つように拡張した模型を調べる．

Y. イムリー　樺沢宇紀訳
メソスコピック物理入門
314頁

固体電子の局在と緩和の一般論，典型的な題材である微細な系の永久電流と量子輸送，量子ホール効果，超伝導メソスコピック系，および雑音の問題を著者一流の観点から論じる．

S. A. サフラン　好村滋行訳
コロイドの物理学
―表面・界面・膜面の熱統計力学―　368頁

熱統計力学の立場から新たに捉え直した世界的にユニークな書である．界面張力，ラフニング転移，ぬれ，界面間の相互作用，膜弾性，自己会合などの問題を扱う，学部3・4年から大学院生以上の学生などを対象とする．

スタウファー，アハロニー　小田垣孝訳
パーコレーションの基本原理
(原書第2版・修訂版)　332頁

初版以来多くの発見およびより精密な数値データが加えられ，さらに新たに導入された概念が含められている．また演習が付け加えられ，教科書としてさらに使いやすくなっている．

デュラン　中西　秀・奥村　剛訳
粉粒体の物理学
―砂と粉と粒子の世界への誘い―　310頁

初等的な力学から解き起こし，最近の研究の成果までを初学者にもわかるようにまとめている．物理学の立場から書かれた粉粒体の教科書としては，(驚くべきことに)本書はほとんど唯一のものであろう．

ジャクソン　　西田　稔訳 **電　磁　気　学** (原書第3版)　　上 614頁　下 576頁	この原書第3版では，電磁気学の基礎として，わかりやすく洗練された内容と，新たな増補，そして最近の重要な応用問題の追加がなされている．定評のあった第2版にも増して，標準的教科書としての価値を高めている．
シック　　岩渕修一訳 **量　子　井　戸** (原書補訂版)　　152頁	多数の訳注に加え，原書を理解するうえで必要な量子力学，統計物理学，固体電子論の基礎事項や原書の補足説明を補遺として加えられ，原書の$\frac{1}{2}$に達している．

別　巻

井上　健監修・三枝寿勝・瀬藤憲昭著 **量子力学演習** —シッフの問題解説—　　392頁	理論的基礎に重点をおきながら，実験・技術を志ざす学生にも容易に理解できる演習書たるべく，代表的教科書として定評あるシッフの同書より，章末の各問題を詳細に解説した．
井上　健監修・瀬藤憲昭・吉田俊博著 **古典力学の問題と解説** —ゴールドスタイン（第2版）に基づいて—　434頁	近代的な量子力学・場の理論・物性論を学ぶ際の踏み台として，古典力学を新しい見地から解説された，一般力学の標準的教科書と，誉れの高いゴールドスタイン（第2版）の章末の問題を詳細に解説した最新の演習書．
大槻義彦監修・飯高敏晃他著 **演習現代の量子力学** —J. J. サクライの問題解説—　　336頁	本書は，J. J. サクライの教科書「現代の量子力学」の章末問題の解説である．この解説は1991年度，早稲田大学の物理学科，応用物理学科のはじめて量子力学を学ぶ学部3年生を対象に行った演習に基づいている．
F. クローズ　井上　健訳・九後汰一郎補遺 訂正増補 **宇宙という名の玉ねぎ** —クォーク達と宇宙の素性—　　268頁	物質の根源の姿を追求してきた今世紀の素粒子物理学の，心躍る発見と認識の深化のプロセスを読者に追体験させてくれる．数式を用いずに一般向けに解説．前著に「その後の発展と歴史的経緯に対する補遺」追加．